

ПРО СИСТЕМУ ВПРАВ, ЩО СПРИЯЮТЬ РОЗВИТКУ ПРОСТОРОВОЇ УЯВИ І ПРОСТОРОВИХ УЯВЛЕНЬ УЧНІВ VI—VIII КЛАСІВ

Починаючи з VI класу, учні восьмирічної школи вивчають систематичний курс геометрії. Тут вже на перших уроках учителю доводиться заохочувати їх до міркувань при ознайомленні з тими або іншими властивостями геометричних фігур, зокрема з їх означеннями, поняттям про теорему і її доведення, а потім з поняттям про аксіому. Установлюються зв'язки між теоремами і аксіомами, і, таким чином, зростає роль і місце логічних умовиводів, проводяться перші узагальнення геометричних понять і тверджень, збільшується в зв'язку з цим їх абстрактність.

Отже, учні роблять перші кроки в засвоєнні дедуктивного методу побудови систематичного курсу геометрії. Усе це пов'язано з великим напруженням розумової діяльності учнів, з підвищенням вимог до рівня їх логічного мислення. Виникають серйозні труднощі в усвідомленні учнями змісту означень теорем і аксіом. Вони не завжди відчують потребу логічного обґрунтування деяких тверджень, доведення їх загальності.

Тому частина школярів вивчає напам'ять формулювання теорем і їх доведення, запам'ятовує окремі фрази, не завжди розуміючи логічний зв'язок між ними.

Важливу роль у подоланні цих труднощів відіграє, поперше, вміле поєднання методів, які застосовувались при вивченні наочної (пропедевтичної) геометрії, з методами логічного обґрунтування, і, по-друге, проведення систематичних вправ на формування просторових уявлень і розвитку уяви учнів. Спинимось на другому завданні.

Специфічним і переважним результатом сприймання учнями геометричного матеріалу є образ фігури, яким вони користуються як при розв'язуванні задач, так і при доведенні теорем.

Просторовий образ є найважливішим складовим елементом геометричного мислення учня.

Формування розумових, логічних процесів відбувається на уроках геометрії дуже швидко і на порівняно вузькому матеріалі (моделі, рисунки, означення, теореми, аксіоми й ін.). Навіть у дітей дошкільного віку вміння виділяти і класифікувати геометричні фігури можна сформувати буквально на одиничних зразках фігур (трикутників, чотирикутників)¹.

Радянські психологи з'ясували, що розумові дії (або конкретна розумова, логічна операція) можуть бути сформовані в дитини тільки в результаті побудови, створення зовнішньої дії, адекватної цій розумовій операції. Під впливом самих емпіричних множин геометричних фігур не можуть бути сформовані, наприклад, розумові операції обчислення площ цих фігур. Тому єдина можливість формування такої розумової дії полягає в тому, щоб раніше створити цю дію у формі дії зовнішньої, а потім перетворити її в дії внутрішні.

Внутрішні розумові дії і операції в дітей виникають переважно під впливом зовнішніх. Шлях, по якому йде перетворення зовнішніх дій у внутрішні, вже добре досліджений психологами.

Учителеві геометрії восьмирічної школи корисно ознайомитись, принаймні у схематичному вигляді, з цим процесом. Простежимо за ним на уроках вивчення розділу «Подібність фігур».

Нам треба сформувати в учнів розумову дію, що відображає просторову властивість фігур і тіл, — подібність, тобто одну з найважливіших властивостей реального простору. Умовно поділимо весь процес навчання на етапи.

I етап. Навчання починається з наведення вчителем прикладів подібності між речами, предметами, тілами в природі, у техніці, навколишньому середовищі, які створюють в учня просторові уявлення — орієнтовну основу для його перших власних розумових дій. Ці перші дії не мають ще ні потрібного математичного узагальнення (тобто здатності здійснюватись в інших умовах і на іншому матеріалі), ні чіткості; ними ще не належно оволоділи, їх ще не закріпили.

¹ Див.: А. Г. Рузская, Ориентировочно-исследовательская деятельность в формировании элементарных обобщений у детей, у зб. «Ориентировочный рефлекс и ориентировочная учебная деятельность», вид-во АПН РРФСР, 1958, стор. 344—348.

II етап. При переході до геометричних фігур розумові дії змінюються за всіма тільки що наведеними параметрами: вони стають більш абстрактними, узагальненими, закріплюються і, втрачаючи свої первісні властивості (фізичні, фізіологічні і ін.), ніби збіднюються. Учня пропонують вирізати з картону або накреслити подібні фігури. Оскільки на цьому етапі розумові дії ще повністю зберігають образну зовнішню форму, то вони відбуваються під подвійним контролем. По-перше, їх контролює вчитель, безпосередньо втручаючись в їх виконання або керуючи ними за допомогою слова; сам учень теж користується вказівками вчителя або використовує ті образи, що залишилися в його пам'яті. По-друге, що особливо важливо, вони ніби контролюються самими речами. Саме на цьому етапі і складається практична основа для абстрактної розумової дії.

На III етапі розумова дія звільняється від прямого контакту з речами і переходить у план мови, тобто здійснюється повністю на основі другої сигнальної системи. Тут встановлюються метричні критерії подібних фігур: рівності всіх відповідних кутів і пропорціональність відповідних лінійних розмірів, формулюється означення, встановлюється роль масштабу, його властивості і ін.

Тільки тепер сформована дія повністю переноситься у внутрішній словесний план і перетворюється в розумову дію. Поступово всі зовнішні її ознаки редукуються, вона максимально узагальнюється і скорочується доти, поки, нарешті, не набуде всіх рис, які властиві внутрішнім розумовим процесам.

Така, звичайно, лише принципова схема процесу формування розумових дій. Фактично цей процес не завжди проходить через усі описані етапи і може починатися прямо з II або III етапу, тобто на речовому рівні. Розумова дія не завжди повинна охоплювати весь зміст нової засвоєваної дії, тому що раніше сформовані розумові процеси при оволодінні новою дією мають вигляд вже готових розумових здібностей і просто використовуються.

У геометрії це зустрічається при вивченні кожної з дальших тем програми, наприклад: пропорціональні відрізки в трикутнику, у крузі, теореми Піфагора. Тут суттєво використовуються сформовані вже такі розумові операції і поняття: «пропорції», «прямокутний трикутник» і ін.

Важливою особливістю розумових дій і операцій є те, що вони можуть переходити з властивої їм скороченої внутрішньої

форми в розгорнуту і зовнішню форму. Таке зворотне перетворення їх, іноді повне, іноді неповне, здійснюється на кожному уроці, особливо при закріпленні вивченого матеріалу. Отже, перехід розумових процесів у розгорнуту зовнішню форму створює можливість використання їх у практичній діяльності людини. Значення цих взаємопереходів і взаємоперетворень дуже актуальне тепер, бо вони зв'язують між собою мислення і працю, «голову і руки», сприяють поєднанню розумової і фізичної праці в умовах школи і закладають основу для розв'язання однієї з найважливіших соціальних проблем — усунення протиріччя між розумовою і фізичною працею.

Із сказаного стає більш зрозумілою велична роль розвинутого геометричного уявлення і просторової уяви в розумовій діяльності учня і завдання вчителя для їх розвитку на уроках геометрії. Успішне розв'язання цього завдання залежить від багатьох причин, основною з яких є продумана система вправ, підпорядкована певним цілям і вимогам.

Так, при вивченні характеристикних властивостей трикутників, пов'язаних з порівняльною довжиною їх сторін, ефективними є такі усні вправи, які сприяють розвитку двомірних просторових уявлень:¹

- 1) Чи може бути рівнобедрений трикутник рівностороннім?
- 2) Одна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 2, а друга дорівнює 10. Знайти третю його сторону.
- 3) Одна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 20, а друга дорівнює $\frac{2}{3}$ третьої. Чому дорівнює периметр трикутника?
- 4) Які співвідношення існують між сторонами трикутника?
- 5) Чи можна побудувати трикутник з відрізків, що дорівнюють 8, 3 і 2?
- 6) Назвати ознаки рівності прямокутних трикутників, які не потребують особливого доведення. Пояснити, чому?
- 7) Чи буває рівнобедрений трикутник прямокутним? Туті прямокутним?
- 8) Чи можуть медіана, бісектриса і висота трикутника пройти поза ним?
- 9) Чи може бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнювати половині основи?

¹ Г. Г. Маслова, Развитие пространственных представлений учащихся восьмилетней школы при решении задач по геометрии, «Математика в школе», 1964, № 3.

Аналогічно, при вивченні характеристичних властивостей трикутників, пов'язаних з величиною їх кутів, ефективною є така система усних вправ:

- 1) Який кут трикутника називається зовнішнім?
- 2) Перелічіть співвідношення між сторонами і кутами трикутника.
- 3) Які наслідки випливають з теореми: «Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює $2d$ »?
- 4) Чи може більший кут трикутника бути менше 60° ?
- 5) Чи може менший кут трикутника бути більше 60° ?
- 6) Визначити кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі в 4 рази більший від кута при вершині?
- 7) Зовнішній кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 102° . Визначити внутрішні кути трикутника.
- 8) Чому дорівнює зовнішній кут рівностороннього трикутника?
- 9) Відношення гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 3. Визначити ці кути.
- 10) Визначити кути прямокутного трикутника, якщо один із зовнішніх кутів його дорівнює 144° .
- 11) Чи може зовнішній кут трикутника дорівнювати внутрішньому його куту?
- 12) Чи можуть два зовнішні кути при двох вершинах трикутника бути прямими?
- 13) Виконайте дослід, який показує, що сума кутів трикутника, вирізаного з паперу, дорівнює розгорненому куту.
- 14) Чи може один кут трикутника дорівнювати 1° , а другий 2° ?
- 15) Чи може зовнішній кут прямокутного трикутника бути менше d ?
- 16) В якому трикутнику сума кутів, прилеглих до однієї сторони, є величина стала?
- 17) Чи може кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнювати 95° ?
- 18) З клаптика паперу зробити модель рівнобедреного трикутника з гострим кутом при вершині (не користуючись креслярськими інструментами).
- 19) Які елементи трикутника сумістяться при складанні його вдвоє по бісектрисі? по висоті?

Добре розвиваються двомірні просторові уявлення і уява за допомогою варіації формулювань умови задачі. Наведемо

групу задач такого типу для розв'язування з учнями VIII класу після вивчення розділу подібності фігур.

Задача 1. Катети прямокутного трикутника відносяться як $10:24$, а гіпотенуза його дорівнює 104 см. Знайти катети.

Другу частину задачі можна змінити так: 1) Знайти катети, якщо відомо, що медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює 52 см. 2) Знайти катети, знаючи, що радіус описаного кола дорівнює 52 см.

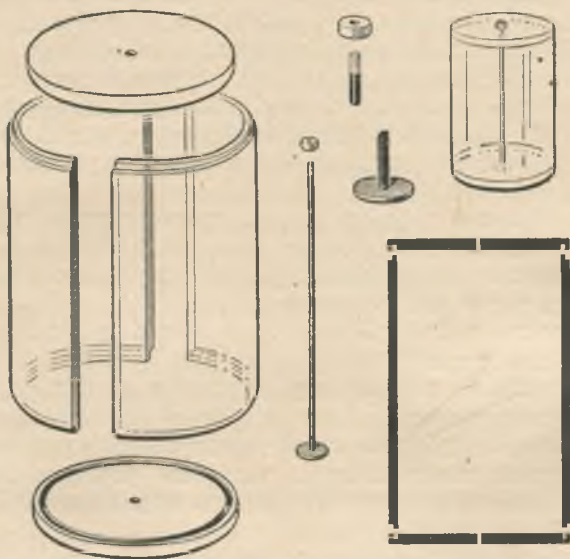


Рис. 1.

Задача 2. Діагоналі ромба відносяться як $10:24$, а сторона його дорівнює 104 . Обчислити діагоналі.

Задача 3. Довжина хорди відноситься до віддалі хорди від центра кола як $10:12$. Обчислити довжину хорди, якщо радіус кола дорівнює 104 см.

Задачі 2 і 3—рівносильні першій, але аналіз властивостей, що їх відрізняють, потребує інтенсивної роботи просторової уяви учнів. Легко побачити, що наведені приклади вправ і задач майже всі розв'язуються усно. Це не випадково. Прин-

ципове значення усного розв'язування задач з геометрії полягає в тому, що учень визначає смислові залежності і співвідношення, відтворюючи їх в уявлених конкретних геометричних образах.

Крім того, створення в учня багатого запасу чітких уявлень про елементарні двомірні просторові форми підготує його до аналізу складніших конфігурацій пізніше, у практичному житті.

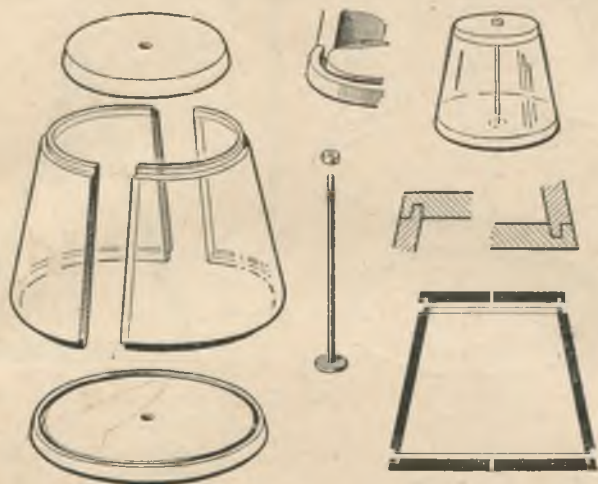


Рис. 2.

Складовою частиною системи вправ з розвитку просторових уявлень є виготовлення саморобних наочних посібників. Наочні посібники — це і *об'єкт спостереження*, і *засіб* для формування нового поняття, і *результат* нового поняття, що формується в процесі праці. При самостійному виготовленні наочного посібника просторовий образ формується частинами: у сприйманні його беруть участь головні просторові аналізатори: зір, дотик і м'язи.

Ми вважаємо, що для розвитку просторової уяви вирішальну роль відіграють ті геометричні фігури і тіла, які учні виготовляють або складають (монтують) своїми руками. Але для цього в математичних кабінетах школи треба мати комплекти

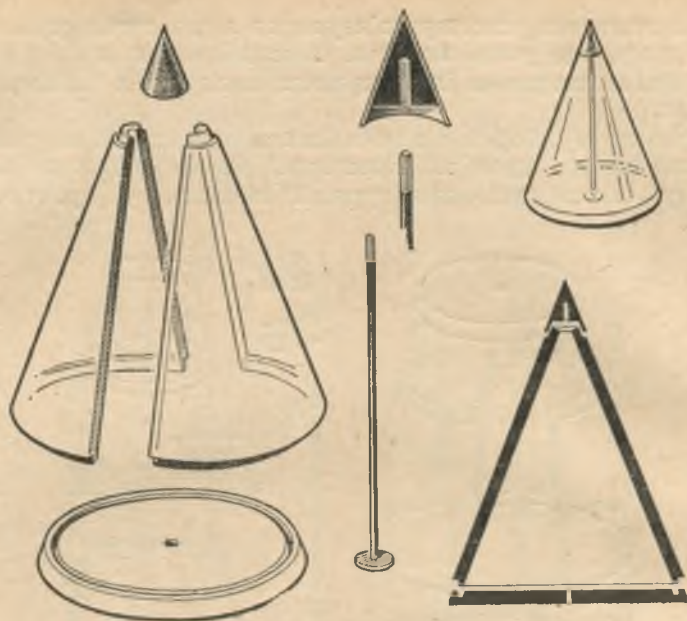


Рис. 3.

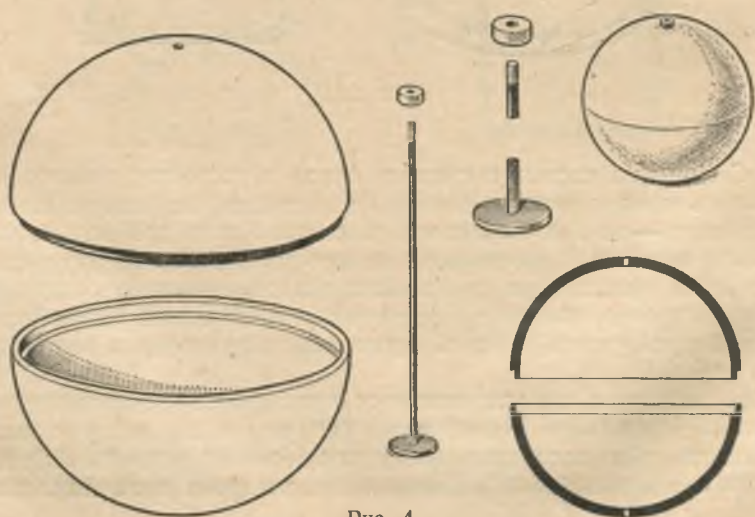


Рис. 4.

заготовлених деталей (напівфабрикатів) для: а) складання планіметричних фігур (з дерева, металу, скла, пластмаси); б) складання многогранників; в) складання каркасних стереометричних моделей різних розмірів; г) складання круглих тіл.

Такі комплекти деталей повинні виготовляти фабрики наочних посібників. Для ілюстрації подаємо ескізи деталей для складання круглих тіл (рис. 1, 2, 3, 4). Деталі бажано виготовляти з плексигласу, капрону, органічного скла.