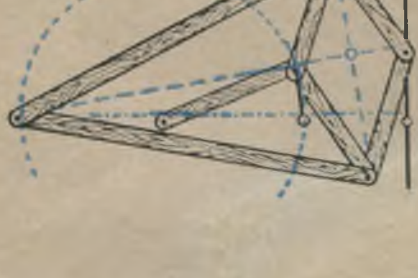
51
Т 36

НАУКОВО-ПОПУЛЯРНА БІБЛІОТЕКА

І. Ф. Тесленко

МЕТОД ІНВЕРСІЇ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ



«РАДЯНСЬКА ШКОЛА»
1959

И

51
Т36

І. Ф. ТЕСЛЕНКО

МЕТОД ІНВЕРСІЇ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Інв. № 12624/б.
Сигнальний екземпляр

ДЕРЖАВНЕ
УЧБОВО-ПЕДАГОГІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО
«РАДЯНСЬКА ШКОЛА»
Київ — 1959

ПЕРЕВІРЕНО
1981 р.

У книжці описано метод інверсії та цікаві приклади його застосування до розв'язування задач на побудову.

Книжка розрахована для учнів старших класів. Вона також дасть учителеві математики цікавий матеріал для проведення гурткової роботи з учнями старших класів середньої школи.

515

ПЕРЕДМОВА

Як відомо, в елементарній геометрії для розв'язування задач на побудову користуються різними методами. Найпоширеніші з них — це метод геометричних місць і метод подібності. Рідше застосовуються методи симетрії, паралельного перенесення, обертання навколо осі або точки та алгебраїчний метод. І майже зовсім не застосовується несправедливо забутий метод інверсії. Однією з причин такого стану, як нам здається, є те, що ці методи недостатньо використовують у шкільному курсі геометрії і навіть у роботі шкільних математичних гуртків.

Щоб опанувати метод інверсії і вміти практично його застосовувати, учням не доводиться засвоювати якісь додаткові знання, що виходили б за межі курсу геометрії VIII класу.

Ця книжка висвітлює ряд питань про особливості як самого методу інверсії, так і задач, які розв'язуються за цим методом.

В основу книжки покладено лекцію, яку неодноразово автор читав для учнів VIII — X класів м. Львова, членів математичного гуртка й учасників математичної олімпіади при Львівському державному університеті ім. І. Франка.

Упорядковуючи лекцію до видання, автор дещо розширив її за рахунок розділу, присвяченого інверсорам, і збільшення кількості задач.

Книжку розраховано на учнів старших класів середньої школи, які мають бажання розширити свою математичну освіту, а також на студентів фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів, які вивчають метод інверсії в спецкурсі елементарної математики.

Читачам, які глибоко зацікавляться цим методом, можна рекомендувати такі книжки: Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. I, Гостехиздат, 1948; I. I. Александров, Збірник геометричних задач на побудову, «Радянська школа», 1955; Ж. Адамар, Елементарна геометрія, Планіметрія, ч. I, «Радянська школа», 1955.

Автор.

ВСТУП

Метод інверсії був відомий вже грецькому математикові Аполлонію (II ст. до н. е.), але в елементарній геометрії почав широко використовуватись тільки в XIX ст. Метод інверсії створили математики й інженери під час розв'язування таких задач:

1. Побудувати коло, яке дотикається до трьох даних кіл (задача Аполлонія).

2. У даний трикутник вписати три кола так, щоб кожне з них дотикалось до двох інших і двох сторін трикутника (задача Мальфатті) *.

3. Визначити місце зображення предметів у сферичному дзеркалі, якщо відомо радіус сфери і відстань предмета від її центра.

4. Побудувати плоский механізм, під час руху якого здійснювався б такий принцип: якщо одна з точок його рухається по колу, то друга точка, яка їй відповідає, має рухатись по прямій лінії, і навпаки.

Хоч на перший погляд задачі 3 і 4 ніби й зовсім не стосуються геометрії, але це, як видно буде далі, далеко не так.

Виникнення методу інверсії було підготовлено всім ходом історичного розвитку метричної геометрії. Зокрема, воно тісно пов'язано з матеріалом, що тепер вивчається в геометрії VIII класу середньої школи і має пряме відношення до обернено пропорціональних величин. В темі «Метричні співвідношення в трикутнику і колі» розглядаються теореми про відрізки, що є середніми пропорціональними між двома даними відрізками (катети й висота прямокутного трикутника, перпендикуляр, проведений з будь-якої точки кола на діаметр, дотична й відрізки січної тощо).

---

* Докладне розв'язання й дослідження задачі читач може знайти в книжці: Ж. Адамар, Елементарна геометрія, ч. I, Планіметрія, «Радянська школа», 1955.

Досить звернути увагу на деякі особливості вказаних теорем, як можна виявити прямий зв'язок їх з істотними властивостями методу інверсії. Справді, розглянемо, наприклад, таку теорему: «*У прямокутному трикутнику перпендикуляр, опущений з вершини прямого кута на гіпотенузу, є середня пропорціональна величина між відрізками, на які основа перпендикуляра ділить гіпотенузу*». Як наслідок з цієї теореми дістаємо відоме твердження про те, що перпендикуляр, опущений з якої-небудь точки кола на діаметр, є середня пропорціональна величина між відрізками діаметра (рис. 1), тобто:

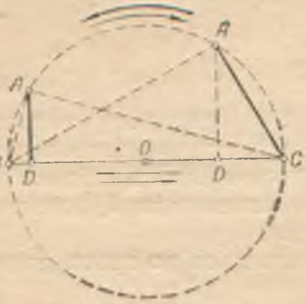


Рис. 1.

$$AD^2 = BD \cdot DC. \qquad (1)$$

Звернемо увагу на такі особливості цих тверджень:

1. Рівність (1) справедлива для перпендикуляра AD, «опущеного з будь-якої точки кола на діаметр». Інакше кажучи, з рухом точки A по колу K точка D рухатиметься по діаметру BC, при цьому змінюватиметься довжина перпендикуляра AD і довжини відрізків BD і DC діаметра BC, але співвідношення (1) залишиться справедливим.

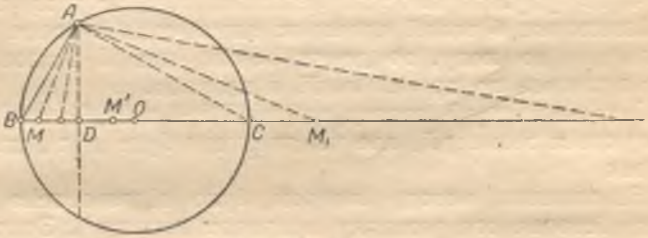


Рис. 2.

2. А якщо точку A зафіксувати, а отже, зберегти незмінною довжину перпендикуляра AD і спробувати змінювати довжину відрізків BD і DC, зберігаючи рівність (1), то виходить, що для кожного відрізка $MD < BD$ (рис. 2) знайдеться такий відрізок $BM_1 > BC$, що

$$AD^2 = BD \cdot DC = MD \cdot DM_1.$$

Інакше кажучи, для кожної довільної точки M відрізка BD знайдеться на продовженні відрізка DC (зовнішня) точка M_1, при якій трикутник MAM_1 буде прямокутним, а перпендикуляр AD стане його висотою. Легко побачити, що положення точки M_1 на прямій BC визначиться перетином цієї прямої й променя $AM_1 \perp AM$. Отже, обертаючи прямий кут MAM_1 навколо його вершини A, в перетині його сторін AM і AM_1 з прямою BC дістанемо взаємно відповідні пари точок M і M_1, для яких добуток $MD \cdot DM_1$ буде сталою величиною, що дорівнює квадрату перпендикуляра AD.

При цьому треба мати на увазі два особливих положення прямого кута, а саме: коли точки M і D або M_1 і D збігаються, то для кожного з цих випадків рівність $AD^2 = MD \cdot DM_1$ втрачає смисл.

Важливо зазначити, що рівність $AD^2 = MD \cdot DM_1$ існує й для точок M', симетричних точкам M (рис. 2) відносно точки D — основи перпендикуляра AD. Щоб розрізняти добутки $DM' \cdot DM_1$ і $DM \cdot DM_1$, роблять так: якщо точки M' і M_1 лежать по один бік від точки D, то добуток $DM_1 \cdot DM'$ беруть із знаком плюс, а якщо по різні сторони, то $DM \cdot DM_1$ беруть із знаком мінус.

Підставою для такого розрізняння добутків $DM' \cdot DM_1$ і $DM \cdot DM_1$ є таке міркування.

На прямій можна вибрати два можливі напрями, один з яких взято за додатний; якщо напрям відрізка збігається з додатним напрямом прямої, то його беруть із знаком плюс, і навпаки.

У нашому випадку відрізки DM' і DM_1 однаково напрямлені, а відрізки DM і DM_1 протилежно напрямлені, тому добуток останніх беруть із знаком мінус.

Розглянемо ще одну теорему: «У прямокутному трикутнику кожний катет є середньою пропорціональною величиною між гіпотенузою й прилеглим до цього катета відрізком гіпотенузи». Як відомо, записують це так (рис. 3):

$$\begin{aligned} AB^2 &= BD \cdot BC, \\ AC^2 &= CD \cdot CB. \end{aligned} \qquad (2)$$

Звернемо увагу на такі особливості співвідношень (2):

1. Якщо точки B і C залишити нерухомими, а точку A рухати в площині рис. 3 так, щоб для кожного її

положення збереглись рівності (2), то геометричним місцем точок A буде коло з діаметром BC.

Інакше кажучи, із зміною довжини катета AB (або AC) при сталій довжині гіпотенузи BC змінюватиметься довжина прилеглого до цього катета відрізка BD (або CD) гіпотенузи.

Рис. 3.

2. Нехай тепер у першій рівності (2) сталою є довжина катета AB. Чи можна змінювати довжини відрізків BD і DC і як? Перш ніж дати відповідь на поставлене запитання, побудуємо коло радіуса AB з центром у точці B й розглянемо із прямокутних трикутників ABC та A_1BM_1 очевидне співвідношення (рис. 4):

$$AB^2 = BD \cdot BC = BM \cdot BM_1, \quad (3)$$

де точки M і M_1 — кінці відрізків BM і BM_1, які задовольняють умови теореми для трикутника BA_1M_1.

Із рисунка 4 видно, що довжини відрізків можуть змінюватись, так що коли довжина одного з них збільшується ($BM > BD$), то довжина другого зменшується ($BM_1 < BC$), і навпаки. При цьому, природно, змінюватимуться розміри прямокутного трикутника ABC.

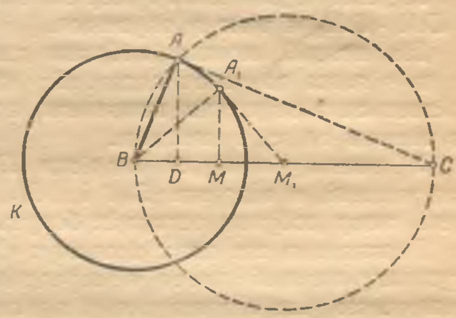


Рис. 4.

Справді, точка A за умовою може рухатись (займати положення на площині) тільки по колу K з центром у точці B і радіусом $R = AB$, а точки D і C, із зміною довжин відрізків BD і BC, рухатимуться по прямій BC. Примітним тут є той факт, що точка D (або M) може рухатись тільки по внутрішній, а точка C (або M_1) тільки по зовнішній частині променя BC відносно кола K. При цьому точки D і C (або M і M_1) рухатимуться в протилежних напрямах, залишаючись весь час на промені BC, і так, що коли $BM = R$, то і $BM_1 = R$, тобто вони зустрінуться в точці, яка належить колу K. Це безпосередньо видно також із рівності (3).

Розглянуті особливості є достатньою підставою для такого досить важливого для нас висновку: кожній внутрішній відносно кола K точці M променя BC відповідає тільки одна точка M_1, яка лежить на зовнішній, відносно того самого кола K, частині променя BC. А оскільки напрям променя BC довільний, то можна сказати, що для кожної точки M, взятої всередині кола K (рис. 4), за винятком центра B, завжди знайдеться єдина точка M_1, яка лежить поза колом K на площині, що визначається колом K, і така, що їх відстані від центра кола K зв'язані рівністю (3).

Цей висновок, як побачимо далі, має пряме відношення до властивостей інверсії. Перш ніж перейти до викладу основних властивостей інверсії, розглянемо деякі досить відомі задачі на визначення геометричного місця точок.

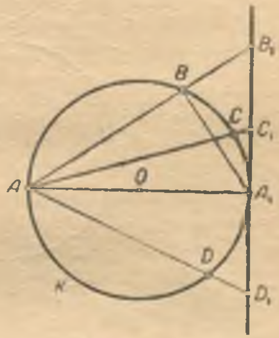


Рис. 5.

Задача 1. На колі K з діаметром d дано точку A. Через неї проведено хорди AB, AC, AD, ..., на продовженнях яких взято точки $B_1, C_1, D_1, \ldots$ так, що $AB \cdot AB_1 = AC \cdot AC_1 = \ldots = d^2$. Знайти геометричне місце точок B_1, C_1, D_1, ... (рис. 5).

Розв'язування. Проведемо через точку A діаметр AA_1. Сполучивши точку A_1 з точками B і B_1, дістанемо два трикутники AA_1B і AA_1B_1. Ці трикутники подібні, оскільки кути між пропорціональними сторонами рівні. Отже, $B_1A_1 \perp AA_1$ і тому точка B_1 (аналогічно й точки C_1, D_1, ...) лежить на прямій, яка дотикається до даного кола K в точці A_1.

Задача 2. Через дану всередині кола K точку A проведено хорди, а з кінців кожної хорди — дотичні до взаємного перетину. Показати, що геометричним місцем точок перетину дотичних буде пряма.

Розв'язування. Позначимо центр кола K через O. Проведемо через дану точку A хорду BC (рис. 6), перпендикулярну до променя OA, а до кінців її — дотичні до кола, які перетинаються в точці A_1, що лежить на OA. Сполучивши точку B з точкою O, дістанемо прямокутний трикутник OBA_1, відрізки гіпотенузи якого, як відомо з попереднього, зв'язані такою рівністю:

$$OA \cdot OA_1 = OB^2 = R^2, \tag{4}$$

де R — радіус кола K.

Якщо проведемо тепер через точку A довільну хорду FE, опустимо на неї з центра O перпендикуляр OD і

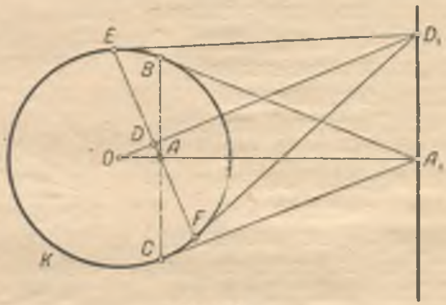


Рис. 6.

побудуємо в кінцях її дотичні, що перетинаються в точці D_1, то знову точка D_1 лежатиме на прямій OD, а з прямокутного трикутника OED_1 випливатиме така рівність:

$$OD \cdot OD_1 = OE^2 = R^2. \tag{5}$$

З рівностей (4) і (5) видно, що трикутники ODA і OA_1D_1 подібні, $\angle OA_1D_1$ прямий і, отже, геометричним місцем точок D_1 є пряма, перпендикулярна до OA в точці A_1.

Перейдемо тепер до викладу властивостей інверсії.

I. МЕТОД ІНВЕРСІЇ

В основі методу інверсії лежить важливе поняття геометрії — поняття інверсії. Термін «інверсія» походить від латинського слова inversio — перевертання або перестановка. Перевертання як рух у геометрії відоме вже учням VI класу*. Воно, зокрема, зв'язане з осьовою

* Див. А. П. Кисельов, Геометрія, ч. I, «Радянська школа», 1957.

симетрією, а саме: щоб сумістити дві симетричні фігури відносно осі, досить одну з них повернути навколо осі симетрії на 180°.

Інакше кажучи, всякі дві фігури, що симетричні відносно якої-небудь осі, можна розглядати як два різні положення на площині однієї і тієї самої фігури. При цьому в одному з положень фігура перевернута, тобто лежить другою стороною.

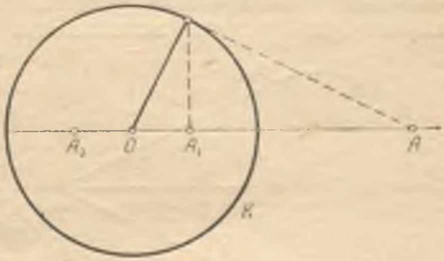


Рис. 7.

Важливо вказати тут на те, що фігура, яку перевертають, не змінюється ні за формою, ні за своїми розмірами (кути і сторони).

При інверсії фігура в деякому розумінні також перевертається, але тільки відносно кола, а не осі симетрії.

Читач, мабуть, помітив, що під час розв'язування попередніх задач і розгляду деяких теорем ми мали справу з колом і рівністю $AD^2 = BD \cdot DC$. Це співвідношення виражає певну відповідність між точками площини, зв'язану з довільно заданим на цій площині колом.

Означення. Інверсією відносно даного кола K з центром у точці O і радіусом R (або просто інверсією) називається така відповідність між точками площини, при якій кожній точці A, відмінній від точки O, ставиться у відповідність точка A_1 так, що, по-перше, обидві точки A і A_1 розміщені на одному й тому самому промені, що виходить з точки O, по-друге, відрізки OA і OA_1 зв'язані співвідношенням

$$OA \cdot OA_1 = R^2. \tag{6}$$

Точки A і A_1 називаються взаємно оберненими, або інверсними, відносно кола K, яке називається колом інверсії; величина R^2 називається степенем інверсії, точка O — полюсом інверсії (рис. 7).

З означення безпосередньо випливають такі властивості інверсії:

1. Властивість симетрії: якщо точка A відповідає точці A_1, то точка A_1 відповідає точці A.

2. Якщо $OA < R$, тобто точка A лежить всередині кола, то $OA_1 > R$ і, отже, точка A_1 лежить поза колом інверсії, і навпаки.

3. Точки, які лежать на колі інверсії, збігаються з своїми інверсними точками. Полюс інверсії не має інверсної собі точки.

З а у в а ж е н н я. а) Для відрізків OA і OA_1 (рис. 7), що лежать на прямій OA по один бік від точки O, існує, як це було раніше встановлено, таке співвідношення: $OA \cdot OA_1 = R^2$.

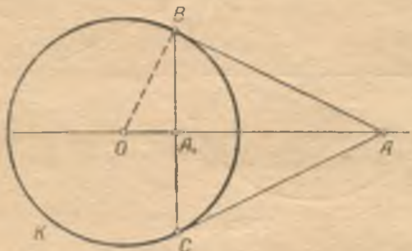


Рис. 8.

б) Коли на прямій OA взято точку A_2, симетричну A_1 відносно полюса O, то відрізки OA_1 і OA_2 матимуть різні знаки* і для них буде справедливим таке співвідношення: $OA \cdot OA_2 = -R^2$. Відрізок OA_1 повертанням навколо O на 180° проти стрілки годинника можна сумістити з відрізком OA_2.

У першому випадку кажуть, що точки A і A_1 гіперболічно інверсні, а в другому,— що точки A і A_2 еліптично інверсні. Ми розглядатимемо тільки гіперболічно інверсні фігури.

Розв'яжемо тепер таку задачу: побудувати точку A_1, інверсну даній точці A відносно даного кола K.

Р о з в'я з у в а н н я. 1) Якщо точка A лежить поза колом K, то проводимо з неї дві дотичні до K (рис. 8) і через точки B і C їх дотику з колом проводимо пряму BC. Точка перетину BC з променем OA і є шуканою точкою A_1.

Справді, з прямокутного трикутника OBA маємо: $OA \cdot OA_1 = R^2$.

2) А якщо точка A лежить всередині K, то ставимо з неї перпендикуляр до променя OA й проводимо дотичну до кола інверсії в одній з його точок перетину з цим перпендикуляром.

Точка перетину цієї дотичної з променем OA і є шуканою точкою A_1.

---

* Див. стор. 7 про напрямлені відрізки.

Розглянемо тепер, як змінюються при інверсії кола й прямі.

1) Пряма, яка проходить через полюс інверсії, відповідає самій собі, тобто точкам прямої відповідають точки тієї самої прямої.

2) Прямій, яка не проходить через полюс інверсії, відповідає коло, що проходить через полюс інверсії (рис. 9, *а* і *б*).

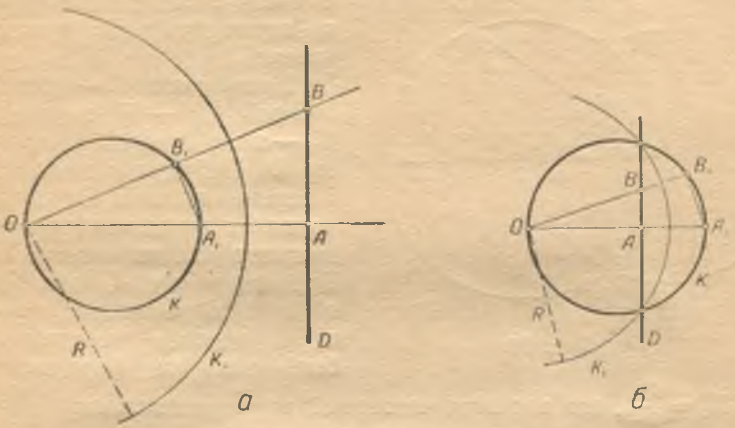


Рис. 9.

Щоб показати це, з полюса інверсії O опустимо перпендикуляр OA на пряму D (A — основа перпендикуляра) й побудуємо точку A_1, інверсну A відносно кола інверсії K_1.

Нехай також точка B_1 інверсна точці B прямої D. Тоді, оскільки $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1$, то $\triangle OAB$ подібний $\triangle OB_1A_1$; звідси випливає, що $\angle OB_1A_1 = 90°$, отже, геометричним місцем точок B_1 буде коло з діаметром OA_1, яке відповідає в інверсії прямій D. У справедливості твердження 2) можна впевнитись ще й так (рис. 10). Нехай дано коло інверсії K_1 з полюсом O і пряму D. Побудуємо точку C, симетричну O відносно прямої D, і точку C', інверсну C відносно кола K_1. Проведемо довільний промінь OB й побудуємо точку B', інверсну B. Тоді $\triangle OCB$ буде подібний $\triangle OB'C'$. Але трикутник OCB — рівнобедрений, оскільки $OB = BC$; отже, трикутник $OC'B'$ також рівнобедрений, тобто $OC' = C'B'$. А через те, що точка C' фіксована, то геометричним місцем точок B' буде шукане коло K з центром у точці C' і радіусом OC'.

Наслідок. Якщо коло й пряма інверсні, то центр кола лежить на перпендикулярі, опущеному з полюса на пряму.

Користуючись тільки що розглянутим твердженням, вкажемо на способи побудови кола, інверсного даній прямій, коли дана пряма не проходить через полюс інверсії.

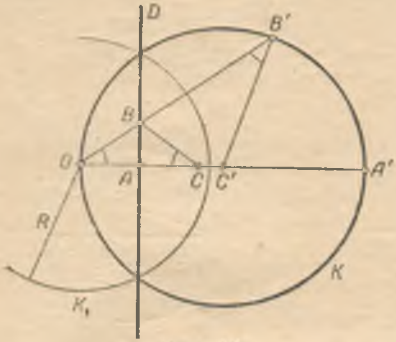


Рис. 10.

Нехай дано: O — полюс інверсії, R^2 — її степінь, K_1 — коло інверсії й пряму D. Побудуємо коло K, інверсне прямій D: а) з точки O опускаємо перпендикуляр OA на пряму D. Будуємо точку A_1 (рис. 9, *а* і *б*), інверсну точці A, відомим нам способом або за формулою $OA_1 = \frac{R^2}{OA}$, що виражає четвертий пропорціональний відрізок до даних відрізків OA, R і R*. Коло, побудоване на діаметрі OA_1, буде шуканим. Або так: б) на перпендикулярі OA (його продовженні) будуємо точку C (рис. 10), симетричну точці O відносно прямої D, і далі — точку C', інверсну точці C відносно K_1. Коло з центром у точці C' і радіусом OC' буде шуканим.

Легко можна помітити, що побудова а) зв'язана з побудовою б).

Справді, з означення інверсії випливає (рис. 10), що $R^2 = OB \cdot OB' = OC \cdot OC'$. За побудовою $OC = 2OA$. Тоді $R^2 = OC \cdot OC' = 2OA \cdot OC' = OA \cdot OA'$, звідки $OA' = 2OC'$. Отже, точка A' інверсна точці A відносно кола K_1 з полюсом у точці O.

Коло, інверсне даній прямій, можна побудувати ще й так.

---

* Див. А. П. Кисельов, Геометрія, ч. I, «Радянська школа», 1957.

Нехай дано полюс інверсії O, коло інверсії K з радіусом R і пряму D, яка не проходить через полюс інверсії.

Розглянемо два випадки.

а) Пряма D лежить поза колом K, тобто R менше за відстань від полюса інверсії до даної прямої D, або $R < OB$ (рис. 11), і отже, $R > OB_1$ або $OB \cdot OB_1 = R^2$.

Опускаємо з полюса O перпендикуляр OB на D. Потім будуємо півколо на діаметрі OB з центром у точці O_2

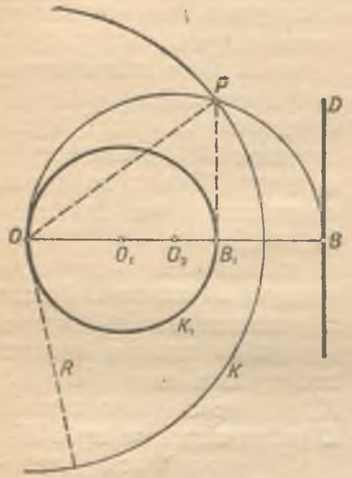


Рис. 11

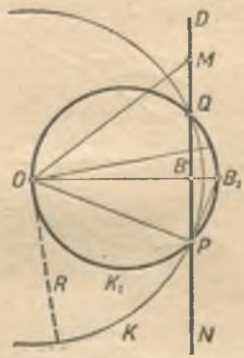


Рис. 12.

і проводимо хорду $OP = R$. Перпендикуляр PB_1, опущений з точки P на діаметр OB, утворює точку B_1, інверсну B. На діаметрі OB_1 будуємо коло K_1 з центром у точці O_1. Коло K_1 інверсне D.

б) R більше за відстань від полюса інверсії до даної прямої D, тобто $R > OB$ (рис. 12), але $R < OB_1$. Як і у випадку а), опускаємо з полюса інверсії O перпендикуляр OB на пряму D.

Далі будуємо на прямій D таку точку P, щоб $OP = R$, і $\angle OPB_1 = 90°$; знаходимо точку B_1, інверсну точці B ($OB \cdot OB_1 = R^2$). Коло K_1, побудоване на діаметрі OB_1, і є шукане коло, інверсне прямій D при даному степені інверсії R^2. Шукане коло K_1 має проходити через точки O, P і Q.

Зазначимо, що точки дуги QB_1P є інверсними точкам хорди QP; точки дуги QO є інверсними точкам променя QM; точки дуги PO є інверсними точкам променя PN; а точки P і Q збігаються з своїми інверсними точками.

З попереднього випливає:

а) з віддаленням прямої D від полюса інверсії O інверсна їй фігура — коло K_1 — зменшується;

б) якщо пряма D дотикається до кола інверсії K, то інверсне цій прямій коло K_1 внутрішньо дотикається до кола інверсії;

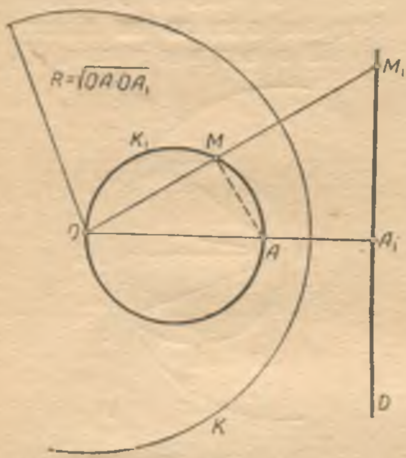


Рис. 13.

в) з наближенням прямої D до полюса інверсії O інверсне їй коло K_1 збільшується й зливається з прямою D, коли ця пряма проходить через полюс інверсії O;

г) довільно розміщена в площині пряма D й коло K_1 завжди взаємно інверсні, тобто завжди можна побудувати коло інверсії K, відносно якого прямій D відповідатиме коло K_1.

Переконаємось у справедливості цього, коли дана пряма D і коло K_1 не мають спільних точок (рис. 13). Нехай OA — діаметр кола, перпендикулярний до прямої D, A_1 — точка перетину продовження OA з D. Проведемо з точки O довільну пряму, яка перетинає коло K_1 в точці M, а пряму D — у точці M_1. Прямокутні трикутники OAM і OA_1M_1, які утворились, подібні (вони мають спільний гострий кут з вершиною у точці O). З пропорціональності відповідних сторін цих трикутників випливає, що $OM_1 \cdot OM = OA_1 \cdot OA$. Неважко переконатись, що відрізки OA_1 і OA для кожного даного розміщення прямої D і кола K_1 будуть сталі, а відрізки OM_1 і OM змінюватимуться залежно від положення променя OM. Але добуток $OM_1 \cdot OM$ сталий і дорівнює добутку $OA_1 \cdot OA$. Сталість добутку записують так:

$$OM_1 \cdot OM = OA_1 \cdot OA = \text{const}\,^*.$$

* Від латинського слова constans — сталий.

Точки M і M_2 інверсні відносно кола інверсії K з радіусом $R = \sqrt{OA_1 \cdot OA}$ і полюсом O, що й підтверджує інверсність D і K_1.

Примітка. Як вправу рекомендуємо розглянути твердження 2) для випадку, коли пряма D й коло K_1 перетинаються.

3) Колу, яке проходить через полюс інверсії, відповідає пряма D (рис. 14).

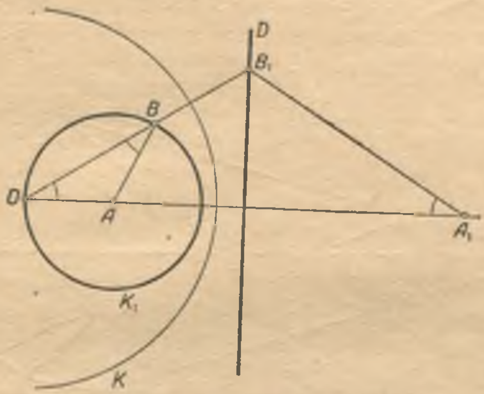


Рис. 14.

Переконаємось у цьому: справді, нехай точка A буде центром даного кола K_1, що проходить через полюс O, а точки A_1 і B_1 інверсні точкам A і B відносно кола інверсії K. Трикутники OAB і OB_1A_1 подібні, а оскільки $OA = AB$, то $OB_1 = B_1A_1$. Точка B_1 рівновіддалена від точок O і A_1.

Отже, геометричним місцем точок B_1, інверсних точкам B, буде пряма D, що проходить через середину OA_1 і перпендикулярна до неї.

У справедливості твердження 3) можна переконатися ще й так (рис. 9).

Нехай дано полюс O й коло K, що проходить через O. Проводимо діаметр OA_1 і будуємо точку A, інверсну A_1. Проводимо довільний промінь OB_1 і будуємо B, інверсну B_1. Чотирикутник ABA_1B_1 — вписаний, отже, кут OAB прямий, тобто A є ортогональною проекцією B. А оскільки точка A нерухома, то геометричним місцем точок B буде пряма D, перпендикулярна до OA.

Інв. № 12624/5.
Науково-...

Висновки: а) порівнюючи розглянуті зміни прямої й кола при інверсії, ми маємо право зробити висновок про те, що відповідність між прямою й колом взаємна: якщо прямій, яка не проходить через полюс інверсії, відповідає коло, яке проходить через полюс інверсії, то й колу, яке проходить через полюс інверсії, відповідає пряма, що не проходить через полюс інверсії;

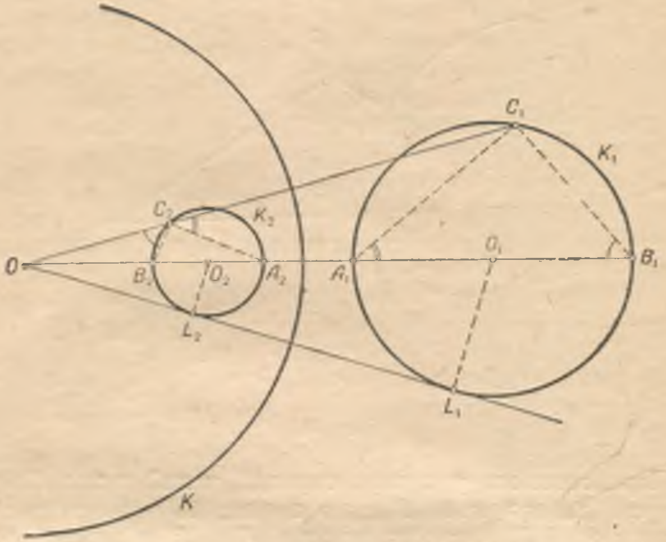


Рис. 15.

б) дотична в полюсі O до кола K, інверсного прямій D, паралельна цій прямій (на рис. 9, 10, 11, 12, 13 і 14 такої дотичної не побудовано).

4) Колу, яке не проходить через полюс інверсії, відповідає коло, яке так само не проходить через полюс інверсії.

Справді, нехай O — полюс інверсії (рис. 15), R^2 — її степінь, K — коло інверсії з центром у точці O. Нехай K_1 — дане коло з центром у точці O_1. Проведемо промінь OO_1, який перетне коло K_1 у двох діаметральних точках A_1 і B_1.

Проведемо довільний промінь OC_1, де C_1 — точка кола K_1. Побудуємо точки A_2, B_2 і C_2, інверсні точкам A_1,

B_1 і C_1, і доведемо, що точки A_2, B_2 і C_2 лежать на одному колі. З означення інверсії випливає, що $OB_1 \cdot OB_2 = OC_1 \cdot OC_2$, або $OB_1 : OC_1 = OC_2 : OB_2$. Через це трикутники OB_1C_1 і OC_2B_2 подібні. Звідси випливає, що $\angle OC_2B_2 = \angle OB_1C_1$. На тій же підставі (пропорціональності) будуть подібними трикутники OA_1C_1 і OC_2A_2, тому $\angle OA_1C_1 = \angle OC_2A_2$. Остання рівність не порушиться, якщо до лівої її частини додати $\angle C_1A_1B_1$, а до правої— $\angle A_2C_2C_1$, оскільки суми, що утворились, дорівнюватимуть 180°. Звідси випливає, що $\angle C_1A_1B_1 = \angle A_2C_2C_1$. Трикутник $A_1C_1B_1$ прямокутний, тому його гострі кути $C_1A_1B_1$ і $C_1B_1A_1$ в сумі дорівнюють 90°. Отже, і кути $A_2C_2C_1$ і OC_2B_2, які їм відповідають, так само в сумі дорівнюють 90°. Тоді кут $B_2C_2A_2$ прямий. З переміщенням точки C_1 по даному колу K_1 точка C_2, інверсна точці C, описуватиме коло K_2, інверсне K_1, оскільки точка C_2 має ту властивість, що відрізок B_2A_2 завжди видно з неї під прямим кутом*.

Користуючись тільки що розглянутим твердженням, можна вказати спосіб побудови кола K_2, інверсного даному колу K_1 (рис. 15). Так, побудувавши точки A_2 і B_2, інверсні точкам (кінцям діаметра кола K_1) A_1 і B_1, ми дістанемо на промені OO_1 (перевернутий) відрізок B_2A_2, який буде діаметром шуканого кола.

Зазначимо, що центри O_1 і O_2 двох інверсних кіл K_1 і K_2 не інверсні точки (рис. 15). Справді, точки L_1 і L_2 спільної зовнішньої дотичної OL_1 кіл K_2 і K_1 є інверсними точками, отже, відрізки, що сполучають ці точки з точкою O, зв'язані рівністю

$$OL_1 \cdot OL_2 = R^2,$$

де R^2 — степінь інверсії кіл K_2 і K_1 відносно кола K.

Водночас $OO_1 \cdot OO_2 > R^2$, бо $OO_1 > OL_1$ і $OO_2 > OL_2$ як гіпотенузи відповідно прямокутних трикутників OL_1O_1 і OL_2O_2.

5) П р и і н в е р с і ї з б е р і г а ю т ь с я к у т и.

Розглядаючи цю важливу властивість інверсії, ми користуватимемось поняттям кута між двома колами і кута між колом і прямою**.

* Див. А. П. К и с е л ь о в, Геометрія, ч. I, «Радянська школа», 1957.

** Див. Д. И. П е р е п е л к и н, Курс элементарной геометрии, ч. I, Гостехиздат, 1948, стор. 316—317.

Означення 1. Кутом між двома колами в точці їх перетину називається будь-який з двох кутів, утворений їх дотичними в цій точці.

Один з цих двох кутів дорівнює кутові між радіусами обох кіл, проведеними в їх спільну точку.

Кут між колами дорівнює нулеві або 180°, якщо кола дотикаються одне до одного.

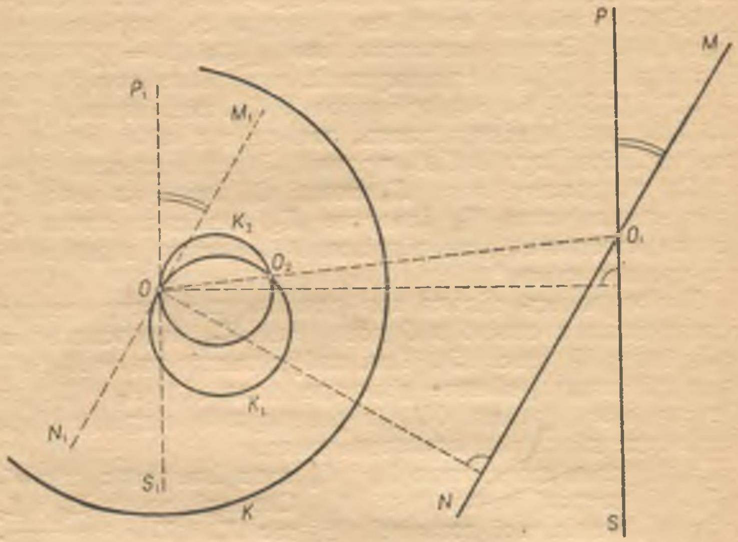


Рис. 15а.

Означення 2. Кутом між колом і прямою називається будь-який з кутів між прямою й дотичною до кола в одній із точок її перетину з даним колом.

Ці кути відповідно дорівнюють тим кутам, які утворює радіус кола, проведений в точку перетину з даною прямою, з перпендикуляром до даної прямої

Нехай дано полюс інверсії O, степінь інверсії R^2 й коло інверсії K з центром у точці O.

а) Нехай дано поза колом K дві прямі MN і PS, які перетинаються в точці O_1.

Доведемо, що при інверсії кути між прямими MN і PS зберігаються (рис. 15а).

Одним з відомих нам способів побудуємо кола K_1 і K_2, інверсні прямим MN і PS. Кола K_1 і K_2 пройдуть через полюс O і перетнуться в другій точці O_2, інверсній точці O_1, що утворилась від перетину MN і PS. Побудуємо дотичні M_1N_1 і P_1S_1 у точці O до кіл K_1 і K_2. Ці дотичні [див. висновок б), стор. 16] будуть відповід-

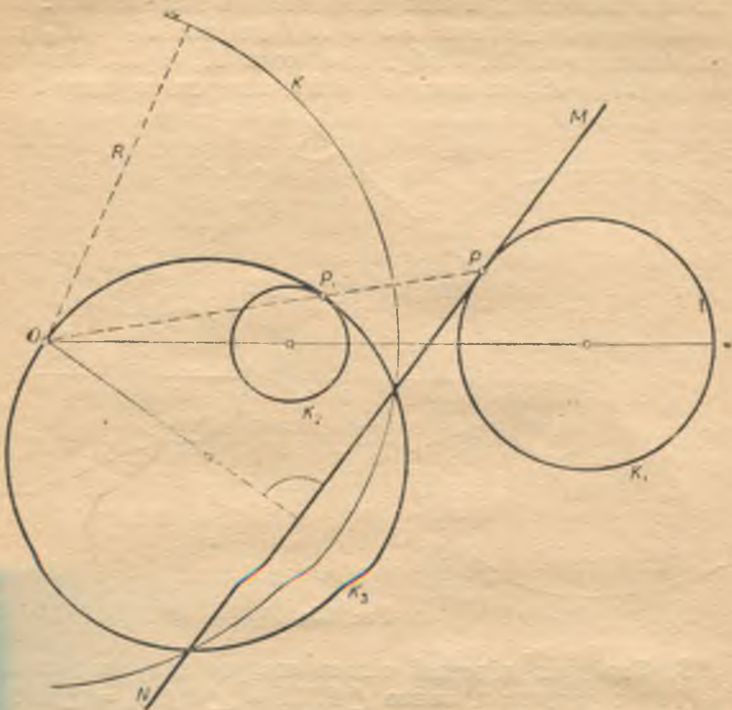


Рис. 15б.

но паралельні даним прямим; отже, кути PO_1M і P_1OM_1 рівні, тобто кут між даними прямими й кут між колами, їм інверсними, будуть рівні між собою.

б) Нехай поза колом K дано коло K_1 і пряму MN, дотичну до кола K_1 в точці P. Доведемо, що при інверсії кут (який дорівнює нулеві) між прямою MN і колом K_1 зберігається (рис. 15б).

Побудуємо коло K_2, інверсне колу K_1, і коло K_3, інверсне прямій MN. Точка P_1 буде інверсною точці P. Причому P_1 єдина спільна точка кіл K_2 і K_3. Отже, P_1

є точкою дотику кіл K_2 і K_3*. Тоді кут між K_2 і K_3 дорівнює нулеві.

в) Нехай поза колом інверсії K дано два кола K_1 і K_2, які перетинаються в точках M і N (рис. 15в). Доведемо, що при інверсії кут між цими колами зберігається.

Проведемо дотичні PS і HQ до кіл K_2 і K_1 у їх спільній точці M. Побудуємо кола K_1' і K_2', інверсні колам K_1 і K_2, та кола K_3 і K_4, інверсні прямим HQ і

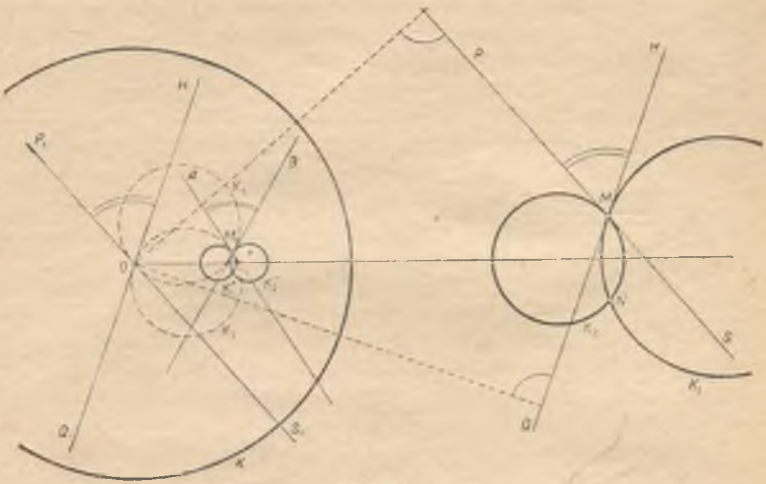


Рис. 15в.

PS. Тоді, на підставі тільки що розглянутих випадків а) і б), означення 1, маємо $\angle PMH = \angle P_1OH_1 = \angle AM_1B$, що й треба було довести.

Висновок. Колу і прямій, що перетинаються під деяким кутом α, в інверсії відповідають кола чи прямі, що перетинаються також під кутом α.

Розглянуті властивості інверсії лежать в основі методу інверсії; ними користуються під час розв'язування геометричних задач на доведення й на побудову в тому разі, коли побудувати інверсну фігуру простіше, ніж шукану. А побудову інверсної фігури здебільшого можна спростити, вдало вибравши полюс інверсії. Сюди належать

* Див. А. П. Кисельов, Геометрія, ч. I, «Радянська школа», 1957.

задачі на проведення кіл, що дотикаються до даних прямих і кіл, а також задачі на побудову кіл, які перетинають дані прямі й кола під даними кутами.

II. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ІНВЕРСІЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Щоб ознайомитись з застосуванням методу інверсії, розглянемо кілька елементарних задач.

Задача 1. Які лінії в інверсії відповідають прямим, що є дотичними до кола інверсії?

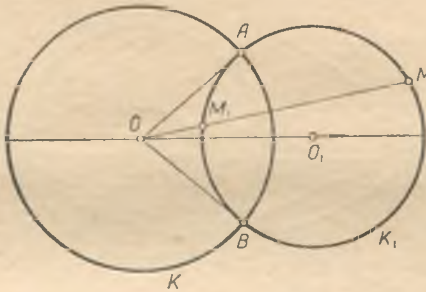


Рис. 16.

Відповідь. Кола, які проходять через полюс інверсії і дотикаються до кола інверсії в точках дотику даних прямих.

Задача 2. З полюса інверсії радіусом, удвоє більшим від радіуса кола інверсії, описано коло. Визначити фігури, інверсні дотичним, проведеним до цього кола.

Відповідь. Це кола, що проходять через полюс інверсії. Центри кіл лежать на перпендикулярах, проведених з полюса до дотичних; радіуси їх дорівнюють $\frac{1}{4}$ частині радіуса кола інверсії.

Задача 3. Довести, що коло, яке перетинає під прямим кутом коло інверсії, само собі відповідає.

Розв'язування. Нехай коло K_1 з центром у точці O_1 перетинає під прямим кутом коло інверсії K (рис. 16). На основі встановлених властивостей інверсії [див. властивість 4), стор. 18] колу K_1 повинно відповідати також коло, яке перетинає K під прямим кутом. Точки A і B

будуть собі інверсними, а кожна точка дуги AMB матиме лише одну інверсну точку на дузі AM_1B.

Задача 4. Дано коло інверсії K з полюсом у точці O. Дано також точки A і B, інверсні точкам A_1 і B_1. Визначити, який кут утворюють відрізки AB і A_1B_1.

Відповідь. Цей кут дорівнює різниці кутів, утворюваних відрізком AB (або A_1B_1) з кожною прямою, що сполучає кінці цього відрізка з полюсом інверсії.

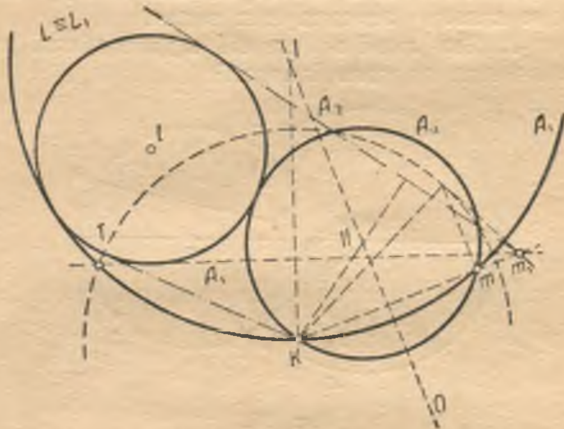


Рис. 17.

Задача 5. Довести, що коли дві точки інверсні відносно якого-небудь кола, то відношення їх відстаней від будь-якої точки кола інверсії є величина стала.

Розв'язування. Нехай точки A і B взаємно інверсні відносно кола K з центром у точці O. M — довільна точка цього кола. З рівності $OA \cdot OB = OM^2$ встановлюємо подібність трикутників OAM і OBM, звідки випливає, що відношення $AM : BM$ не залежить від вибору точки M.

Задача 6. Дано коло L і поза ним дві точки K і m. Побудувати кола, які дотикаються до кола L і проходять через точки K і m.

Розв'язування. Нехай точка K буде полюсом інверсії, квадрат дотичної KT, проведеної з точки K до кола L, буде степенем інверсії (рис. 17). Тоді в даній інверсії точці m відповідатиме точка m_1, колу L відповідає коло L_1 (див. задачу 3), яке збігається з L (умовимось це записувати так: $L \equiv L_1$).

Тепер задача звелась до простішої: побудувати дотичні A_1 і A_2 до кола L_1, які проходять через точку m_1. Повертаючись до вихідної задачі, побудуємо дотичні A_1 і A_2, інверсні колам A_{I} і A_{II}, які й дотикатимуться до кола L і проходитимуть через точки K і m.

Задача 7. Дано коло L, поза ним пряму M і точку K. Побудувати кола, які дотикаються до кола L і прямої M та проходять через точку K (рис. 18).

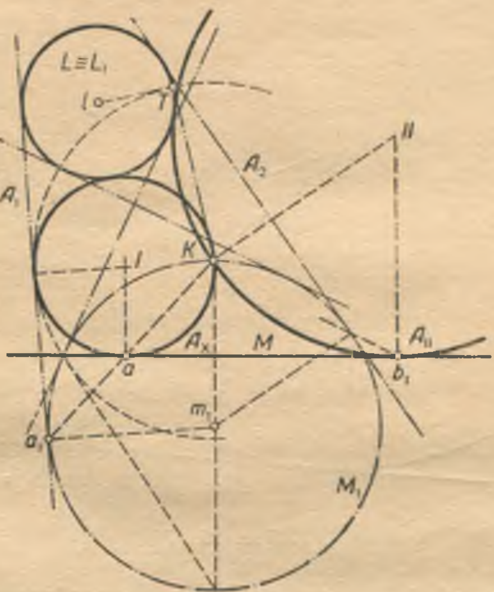


Рис. 18.

Розв'язування. Візьмемо точку K за полюс інверсії, а $(KT)^2$ — за степінь інверсії, де KT — дотична, проведена з точки K до кола L. Тоді в даній інверсії прямій M відповідає коло M_1, кола L і L_1 збіжаться (див. задачу 3), тобто $L \equiv L_1$. Після інверсії задача зводиться до простішої: побудувати спільні дотичні до кіл L_1 і M_1 — і далі розв'язується аналогічно до задачі 6.

Задача 8. Дано пряму L і по одну сторону її дві точки m і K. Побудувати коло, яке дотикається до прямої L і проходить через точки K і m.

Розв'язування. Візьмемо точку K за полюс інверсії, а $(KD)^2$ — за степінь інверсії, де KD — перпендикуляр, опущений з точки K на пряму L (рис. 19). Тоді в даній інверсії прямій L відповідає коло L_1, яке проходить через полюс K; точці m відповідає точка m_1. Після інверсії задача зводиться до такої: побудувати до кола

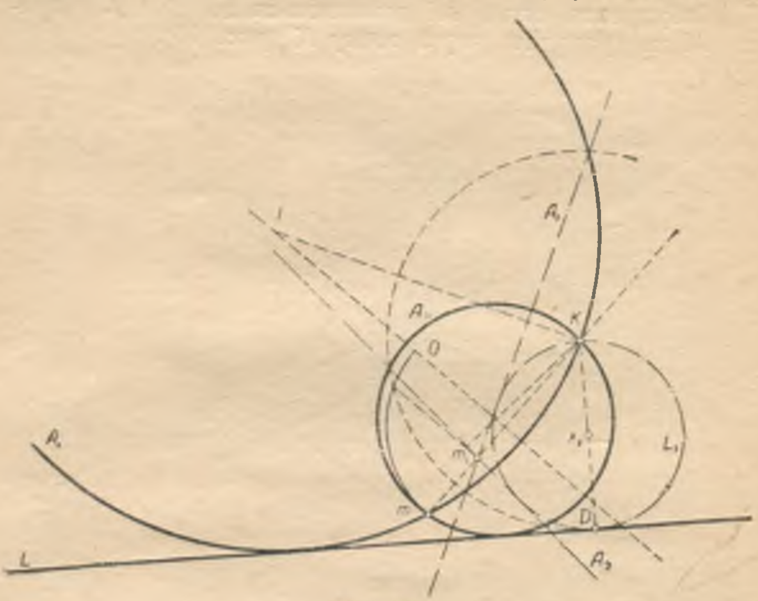


Рис. 19.

L_1 дотичні A_1 і A_2, що проходять через точку m_1. Відповідно до вимоги вихідної задачі, будуємо кола A_I й A_{II}, інверсні прямим A_1 і A_2, які й будуть її розв'язком.

Задача 9. Побудувати коло, яке дотикається до двох даних прямих M і L, що перетинаються, і яке проходить через дану точку K (рис. 20).

Розв'язування. Візьмемо точку K за полюс інверсії, а $(KD)^2$ — за степінь інверсії, де KD — перпендикуляр, опущений з точки K на пряму L. Тоді в даній інверсії прямим M і L відповідають кола M_1 і L_1, і задача зводиться до побудови спільних дотичних A_1 і A_2 до двох кіл L_1 і M_1 (рис. 20), які перетинаються. Повертаючись до вихідної задачі, дістаємо два кола A_I і

A_{II}, які інверсні дотичним A_1 і A_2 і проходять через полюс K. Ці кола й будуть розв'язками задачі.

Задача 10. Дано два кола K і K_1 з центрами в точках O і O_1, які перетинаються в точках A і B під прямими кутами. Візьмемо довільні точки C і D на колах K і K_1.

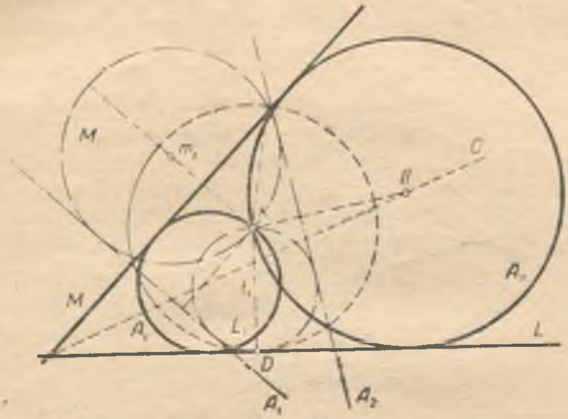


Рис. 20.

Довести, що кола, які визначаються точками A, C, D і B, C, D, перетинаються під прямим кутом.

Розв'язування. Нехай точка C буде полюсом інверсії (рис. 21), а квадрат дотичної, проведеної з C до кола K_1,— степенем інверсії. Тоді коло K_1 збігається з своїм інверсним, а колам K, ACD і BCD, за властивістю 3), відповідають прямі $A'B'$, $A'D'$ і $B'D'$. Оскільки коло K перетинає коло K_1 під прямим кутом, то пряма $A'B'$ також перетне K_1 під прямим кутом, тобто пройде через його центр. Легко побачити, що $A'D'$ і $B'D'$ взаємно перпендикулярні, отже, інверсні їм кола ACD і BCD перетинаються під прямим кутом.

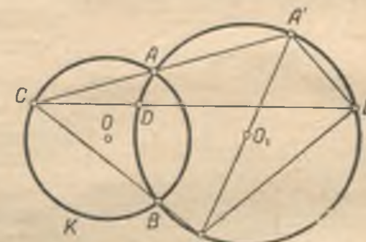


Рис. 21.

Задача 11. Дано два кола з центрами в точках O і O_1, які мають взаємно перпендикулярні діаметри AB і

$A'B'$ і які перетинаються під прямим кутом. Треба довести, що чотири прямі, які сполучають точки A, B, A', B', попарно проходять через точки перетину C і D даних кіл.

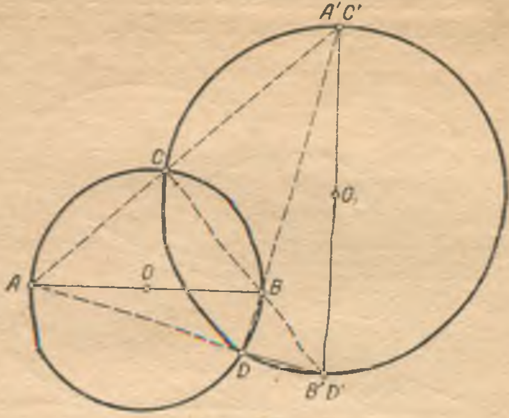


Рис. 22.

Вказівка. Взяти точку A за полюс інверсії, а квадрат дотичної, проведеної з A до O_1, за степінь інверсії (рис. 22). Див. задачу 10 і 3.

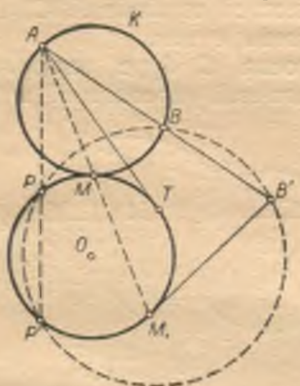


Рис. 23.

Задача 12. Дано два кола O і O_1 і точку A. Треба провести через дану точку A коло, дотичне до двох даних.

Вказівка. Взявши точку A за полюс інверсії, а квадрат дотичної AT, проведеної до одного з кіл, за степінь інверсії, зведемо задачу до проведення спільних дотичних до двох кіл O' і O'_1, інверсних даним колам O і O_1.

Задача 13. Побудувати коло K, яке проходить через дані поза ним дві точки A і B і дотикається до даного кола O.

Розв'язування. Припустимо, що задачу розв'язано. Точку A візьмемо за центр інверсії, а квадрат дотичної, проведеної з A до кола O,— за степінь інверсії: $AP \cdot AP' = (AT)^2$. Шукане коло відповідає прямій B_1M_1

(рис. 23), перпендикулярній до AB і дотичній до кола O в точці M_1, інверсній точці M. Шукане коло визначиться точками A, B і M.

Задача 14. Знаючи відстань між даними точками A і B, знайти відстань між інверсними їм точками* A' і B'.

Розв'язування. 1) Точки A, B, A' і B' лежать на одному промені (рис. 24) з полюсом O. Нехай степінь

Рис 24.

інверсії дорівнює R^2. Тоді $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = R^2$, звідки $OA' = \frac{R^2}{OA}$, $OB' = \frac{R^2}{OB}$; відрізок $A'B' = OA' - OB' = \frac{R^2 \cdot AB}{OA \cdot OB}$.

2) Точки A, B, A' і B' лежать на одному колі (рис. 25). Тоді за властивістю січних, проведених з точки O до кола K, маємо: $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$, або $\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$, крім того, кути AOB і $B'OA'$ рівні між собою. Отже, трикутники AOB і $B'OA'$ подібні, звідки $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB}$, або $A'B' = \frac{AB \cdot OA'}{OB} = \frac{AB \cdot OA \cdot OA'}{OA \cdot OB} = R^2 \cdot \frac{AB}{OA \cdot OB}$.

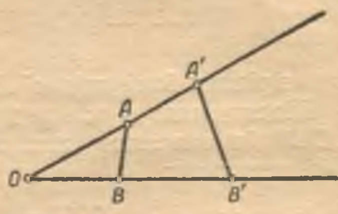


Рис. 25.

Задача 15. Сполучимо вершини даного квадрата $ABCD$ з якою-небудь зовнішньою точкою P його площини; утворені прямі перетнуть коло, описане навколо квадрата, в чотирьох нових точках A', B', C' і D'. Треба показати, що в чотирикутнику $A'B'C'D'$ добутки протилежних сторін будуть рівні між собою, тобто $A'B' \cdot C'D' = A'D' \cdot B'C'$.

Розв'язування. Точки A', B', C' і D' інверсні точкам A, B, C і D в інверсії з полюсом P і степенем, який дорівнює квадрату дотичної, проведеної з точки P до кола, описаного навколо квадрата. Отже, $A'B' = \frac{R^2 \cdot BA}{PA \cdot PB}$

---

* Див. Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. I, Гостехиздат, 1948, стор. 312.

(див. задачу 14); аналогічний вираз дістанемо і для $B'C'$, $C'D'$ і $D'A'$. Беручи до уваги, що $AB = CB = DC = DA$, дістанемо $A'B' \cdot C'D' = B'C' \cdot D'A' = \frac{R^4 \cdot AB^2}{PA \cdot PB \cdot PC \cdot PD}$.

Задача 16. Довести, що добуток діагоналей вписаного в коло чотирикутника дорівнює сумі добутків його протилежних сторін. (Теорема Птолемея)*.

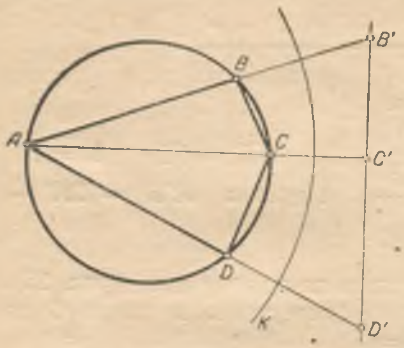


Рис. 26.

Р о з в ' я з у в а н н я. Нехай $ABCD$ (рис. 26) — вписаний чотирикутник. Візьмемо точку A за полюс інверсії, а R — за довільний радіус кола інверсії K. В утвореній інверсії колу $ABCD$ відповідає пряма, яка визначається точками B', C', D', інверсними точкам B, C, D. Якщо точка C — вершина даного чотирикутника — протилежна вершині A, то точки B і D, а отже, й точки B' і D' лежать з різних боків прямої AC, а тому $B'D' = B'C' + C'D'$.

Підставивши в попередню рівність замість $B'D'$, $B'C'$ і $C'D'$ їх значення (див. задачу 14), виражені через відомі величини:

$$B'D' = BD \frac{R^2}{AB \cdot AD},$$

$$B'C' = BC \frac{R_2}{AB \cdot AC},$$

$$C'D' = CD \frac{R^2}{AC \cdot AD},$$

помноживши на $AB \cdot AC \cdot AD$ і поділивши на R^2, дістанемо:

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD.$$

Задача 17. Дано коло і на ньому дві точки A і B. Побудувати по один бік від прямої AB дві паралельні хорди, добуток яких дорівнює даній величині R^2.

В к а з і в к а. Скористатись розв'язанням попередньої задачі.

---

* К л а в д і й П т о л е м е й — відомий грецький астроном, який жив у II ст. н. е.

Задача 18. Побудувати коло, яке дотикається до даного кола K в точці A і до другого даного кола K_1, яке лежить поза колом K.

Вказівка. Взявши точку A за полюс інверсії, а за її степінь квадрат дотичної, проведеної з точки A до кола K_1, дістанемо після інверсії таку задачу: побудувати дотичні до кола K'_1, інверсного K_1, паралельні прямій K', інверсній K.

Задача 19. Побудувати коло, дотичне до даного кола K в точці A і до даної прямої MN.

Вказівка. Розв'язується так само, як і задача 18.

Задача 20. Побудувати коло, що дотикалося б до даного кола K в точці A і проходило б через дану точку B.

Вказівка. Взявши точку A за полюс інверсії, квадрат відрізка AB за її степінь, після інверсії задача зводиться до такої: побудувати коло, що дотикалося б до даної прямої і проходило б через дану точку B.

Задача 21. Побудувати коло, дотичне до даної прямої AB в її точці O і до даного кола K.

Вказівка. Взявши точку O за полюс інверсії, квадрат дотичної, проведеної з O до кола K, за степінь інверсії, зведемо задачу до такої: побудувати до даного кола дотичні, паралельні до даної прямої (див. задачу 18).

Задача 22. Побудувати коло, дотичне до даної прямої AB в її точці O і до другої даної прямої CD.

Вказівка. Взявши точку O за полюс інверсії, а за її степінь квадрат перпендикуляра, опущеного з точки O на CD, зведемо задачу до такої: побудувати до даного кола дотичні, паралельні даній прямій.

Задача 23. Побудувати коло, яке було б дотичне до прямої AB в її точці O і яке проходило б через дану точку C.

Вказівка. Взявши точку O за полюс інверсії, квадрат відрізка OC за її степінь, зведемо задачу до такої: через дану точку провести пряму, паралельну даній прямій.

Задача 24. Побудувати коло, яке проходить через дані дві точки A і B і перетинає під прямим кутом дане коло K.

Відповідь. Шукане коло інверсне січній, яка проходить через взаємно інверсні точки B і B_1 та центр кола K.

Задача 25. Дано коло K і в ньому три хорди AB, AC і AD. На кожній хорді, як на діаметрі, побудовано кола. Треба довести, що другі точки перетину цих кіл лежать на одній прямій.

Вказівка. Взяти точку A за полюс інверсії з довільним радіусом кола інверсії; колам відповідають прямі, які утворюють трикутник з вершинами, інверсними другим точкам перетину кіл. Описане навколо утвореного трикутника коло пройде через полюс і буде інверсне шуканій прямій.

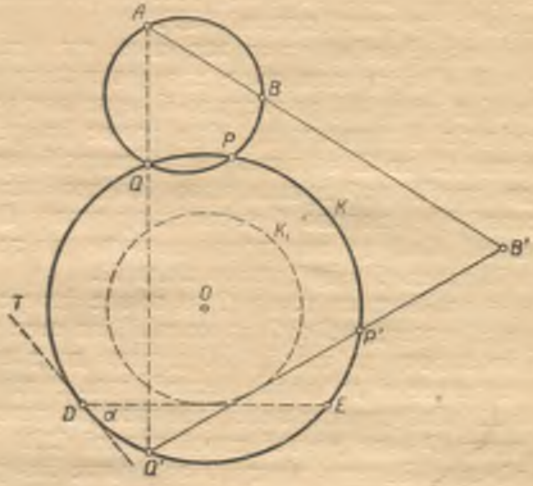


Рис. 27.

Задача 26. Побудувати коло, яке перетинає дане коло K під даним кутом α і проходить через дані дві точки A і B, що лежать поза K.

Вказівка. Візьмемо точку A за полюс інверсії з довільним степенем. Будуємо точку B', інверсну точці B, і проводимо січну $B'P'Q'$ кола K під кутом α (рис. 27). Коло K_1 є геометричним місцем середин хорд, які утворюють з колом K кут α. Шукане коло, інверсне січній $B'P'Q'$, легко побудувати за чотирма точками A, B, P і Q.

Задача 27. Дано коло K з центром O і поза ним дві точки A і B. Проведемо довільну січну BCD. Прямі AD і AC перетинають коло K у точках F і E. Треба знайти геометричне місце центрів кіл AEF, які утворюватимуться при зміні положення січної BCD.

Вказівка. Візьмемо точку A за полюс інверсії, квадрат дотичної, проведеної з A до кола K, — за степінь інверсії (рис. 28). Колу AEF відповідатиме пряма CD (див. задачу 16), яка проходить через дану точку B. Отже, інверсне їй коло AEF проходить через дві нерухомі точки A і B_1, а тому геометричним місцем центрів цих кіл буде пряма l.

Задача 28. Дано коло K з центром у точці O і поза ним точку A. Через точку A проходить змінне коло K_1, яке перетинає коло K під прямим кутом. Треба знайти геометричне місце центра O_1 кіл K_1.

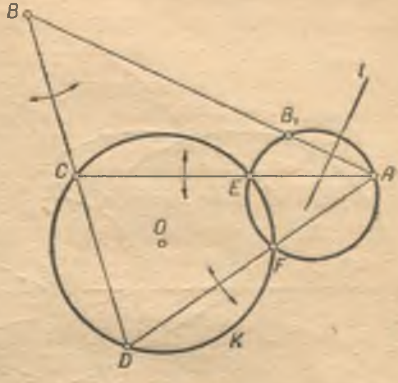


Рис. 28.

Розв'язування. Нехай точка B буде другою точкою перетину прямої OA з колом K_1. Проведемо з точки O дотичну OP до кола K_1.

На підставі задачі 3 маємо: $OA \cdot OB = OP^2$. Звідси випливає, що точка B також стала для всіх кіл K_1, а геометричним місцем їх центрів буде пряма l, яка перпендикулярна до хорди AB і проходить через її середину.

Задача 29. Дано два кола K і L, які лежать одне поза другим. Треба вибрати полюс і степінь інверсії так, щоб колам K і L відповідали концентричні кола K_1 і L_1 (рис. 29).

Розв'язування. На лінії центрів OO_1 даних кіл K і L вибираємо точку O_2 так, щоб дотичні O_2T і O_2T_1, проведені з цієї точки до кіл K і L, були рівні між собою. Коло R із центром у точці O_2 і радіусом, що дорівнює $O_2T = O_2T_1$, перетне кола K і L під прямим кутом; воно перетне й лінію центрів OO_1 в точках S і P.

Візьмемо точку S за полюс інверсії. Степінь інверсії виберемо рівним $(ST_2)^2$. За властивостями 3 і 4 інверсії колам K і L відповідатимуть кола K_1 і L_1 з центрами, які лежать на лінії центрів OO_1, а колу R відповідатиме пряма R_1, що перетинає [за властивістю 5)] кола K_1 і L_1 під прямим кутом, а отже, яка проходить через їх центри. Такою прямою, яка також перетинає K_1 і L_1

під прямим кутом, є їх лінія центрів, але пряма R_1 з нею не збігається, отже, кола K_1 і L_1 — концентричні. Таким чином, при інверсії з полюсом у точці S колам K і L відповідають концентричні кола K_1 і L_1.

Задача 30. (Аполлонія)*. Побудувати коло, яке дотикається до трьох даних кіл.

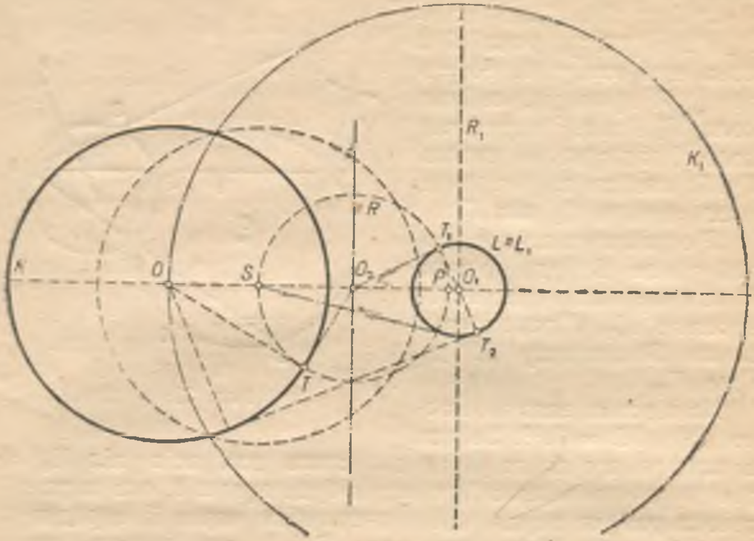


Рис. 29.

Вказівка. Нехай дано кола K, L і M, причому, кожні двоє розміщені одне поза одним (рис. 30). Як і в попередній задачі, точку S візьмемо за полюс інверсії, а квадрат дотичної, проведеної з S до кола L, — за степінь інверсії. При інверсії коло L відповідає само собі (див. задачу 3), коло K відповідає колу K_1, яке концентричне з $L \equiv L_1$, а колу M відповідає коло K_1.

Тепер задача звелась до такої: побудувати коло, яке дотикається до трьох даних кіл K_1, L_1 і M_1, двоє з яких L_1 і K_1 — концентричні.

Відомо, що геометричне місце центрів кіл, що дотикаються до двох даних концентричних кіл, складається

* Аполлоній — грецький математик, який жив близько 200 р. до н. е.

з двох кіл. концентричних з даними; радіус одного з цих кіл дорівнює півсумі радіусів даних кіл. а радіус другого кола дорівнює піврізниці радіусів даних кіл*.

Нехай коло M_1 лежить між колами K_1 і L_1.

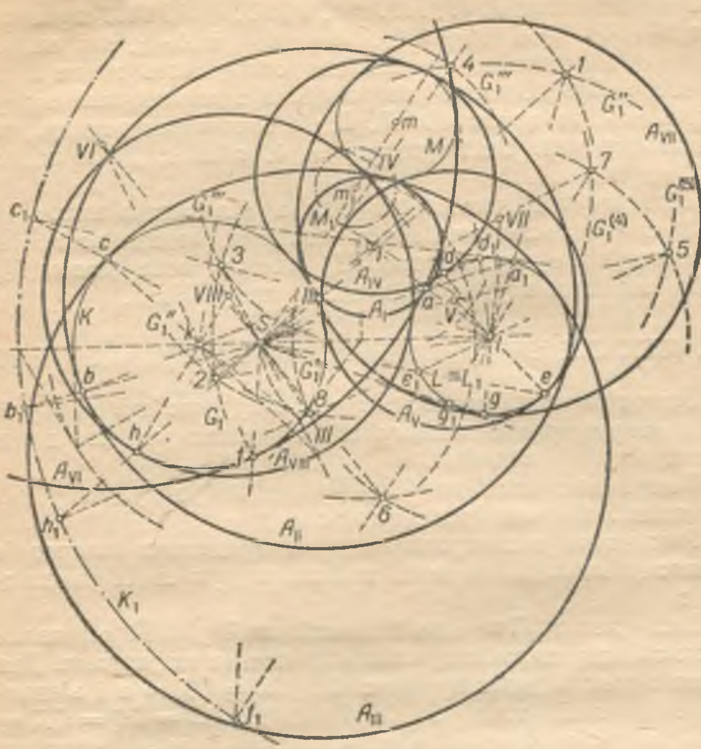


Рис. 30.

Оскільки два кола можуть перетинатись не більш як у двох точках, то найбільше число розв'язків задачі — 8. Позначимо ці точки цифрами *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, *7* і *8*. Кола з центрами у цих точках будуть розв'язками задачі (на рис. 30 їх не показано). Щоб розв'язати задачу Аполлонія, скористуємось точками дотику кіл *1*, *2*, *3*, ... і 8 з колами K_1 і L_1, що визначаються перетинами прямих,

* Див. Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, Гостехиздат, 1948, стор. 92, Построение 16.

які сполучають центр кола $L \equiv L_1$ з центрами кіл *1*, *2*, *3*, *4*, ..., *8* з колами K_1 і L_1, а на колі M_1 — перетинами прямих, які сполучають центр кола M_1 з центрами кіл *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, ... і *8*. Виконавши зворотну інверсію, знайдемо центри *I*, *II*, *III*, *IV*, *V*, *VI*, *VII* і *VIII* шуканих кіл A_{I}, A_{II}, A_{III}, A_{IV}, A_{V}, A_{VI}, A_{VII} і A_{VIII}, які визначаються перетинами прямих, що сполучають точки *1*, *2*, *3*, *4*, ..., *8* з полюсом інверсії S, з прямими, які сполучають центри даних кіл K, L, M з точками дотику, які лежать на них. Точки дотику a, b, c, d, e, f і h позначені на колі K.

Залежно від розміщення даних кіл задача може мати й менше число розв'язків, зокрема, задача зовсім не має розв'язків, якщо коло M_1 лежить поза колом K_1, тобто більшим з утворених після інверсії кіл.

III. МЕХАНІЗМИ ДЛЯ ПОБУДОВИ ІНВЕРСНИХ ФІГУР

Метод інверсії покладено в основу розв'язання проблеми напрямного механізму, або «прямила», що має деяке застосування в техніці*.

Такий механізм, який здійснює побудову інверсних фігур, називається **і н в е р с о р о м**.

Розглянемо геометричну структуру деяких інверсорів у такому вигляді, як вони вийшли з рук своїх винахідників.

І н в е р с о р П о с е л ь є (винайдений у 1864 р.) являє собою систему шести стержнів, скріплених шарнірами. Два стержні мають довжину (рис. 31) $OL = OK = a$ і з'єднані в нерухомій точці O, інші чотири $PL = LQ = QK = KP = b < a$ утворюють ромб, дві протилежні вершини якого з'єднані з кінцями стержнів a.

Інверсор має два степені вільності: по-перше, обидва стержні a можна довільно наближати один до одного або розсувати, по-друге, обидва їх можна довільно обертати як одне ціле навколо точки O. З кожним рухом три точки O, P і Q завжди залишаються на одній прямій, переконаємось у цьому. Пряма OP є бісектрисою кута LOK, PQ — бісектрисою кута LPK. Нехай точка M буде точкою перетину діагоналей ромба. Тоді $LM = MK$ і

* Див. И. И. А р т о б о л е в с к и й, Механизмы, т. I, вид. АН СРСР, 1947.

OM, як медіана рівнобедреного трикутника LOK, водночас буде його бісектрисою і, отже, збіжиться з прямою OP. Отже, точки O, P і M, а також і точка Q лежать на одній прямій. Якщо точку O закріпити, а точку P рухати по даній кривій, то точка Q опише фігуру, інверсну заданій кривій.

Справді,

$$OP \cdot OQ = (OM + MQ) \cdot (OM - MQ) = OM^2 - $$
$$- MQ^2 = OL^2 - ML^2 - (LQ^2 - ML^2) = OL^2 - LQ^2 =$$
$$= a^2 - b^2 = \text{const}.$$

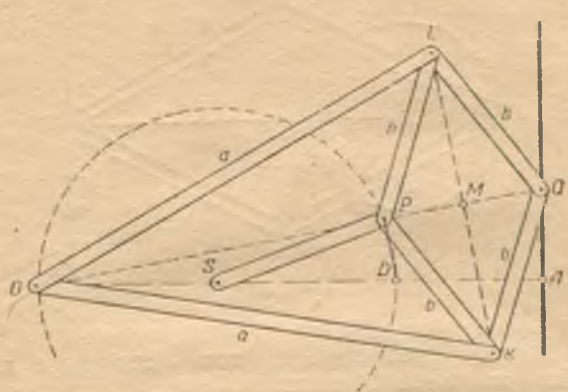


Рис. 31.

Отже, добуток $OP \cdot OQ$ є величина стала й не залежить від положення механізму. Стала величина $a^2 - b^2$ називається степенем інверсії. Ця різниця додатна, і її можна позначити через R^2. З рівності $OP \cdot OQ = R^2$ випливає, що точки P і Q взаємно інверсні. Щоб дістати рух точки P по колу, приєднаємо до неї сьомий стержень PS, закріпивши другий кінець його по середині між точкою O і початковим положенням точки P, або $OS = SD = r$. Тоді залишається тільки один ступінь вільності руху, і точка Q пересуватиметься по прямій. Треба зазначити, що точка Q не може описувати всю необмежену пряму; рух її обмежений тим, що відстань її від точки O завжди менша від $a + b$.

Пряма, яку описує точка Q, завжди перпендикулярна до прямої OS. Це випливає з того, що ортогональна проекція точки Q на пряму OS для будь-яких положень механізму фіксована, тобто довжина відрізка OA є величиною сталою. Справді, трикутники OPD і OHQ подібні, тоді $OD : OP = OQ : OA$, або $OA = (OP \cdot OQ) : : OD = R^2 : 2r = \text{const}$. Звідси зрозуміло, що обертанням стержня (кривошипа) SP створюємо поступальний рух точки Q. Це дає можливість використати інверсор як насос.

Якщо стержні $OL = OK = a$ зробити менші за відрізок b, то дістанемо інверсор, зображений на рис. 32.

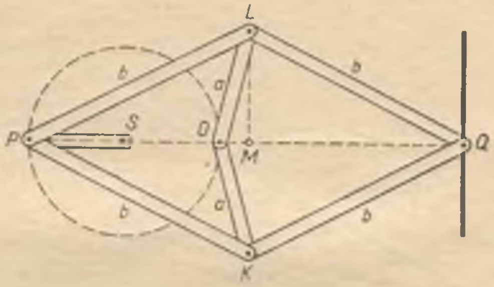


Рис. 32.

Якщо в точку O поміститься його вістря, а в точки P і Q олівці, то точка P опише фігуру, інверсну фігурі, яку описуватиме точка Q.

У цьому випадку $a < b$ і точка O лежить між точками P і Q, а кут QOP — тупий. Як і в попередньому випадку, точка Q рухається по прямій, перпендикулярній до прямої SO.

Такий інверсор називається **еліптичним**. Степінь еліптичної інверсії — число від'ємне: $OP \cdot OQ = a^2 - b^2 = -R^2$. Еліптичний інверсор може мати форму пантографа (рис. 33)*.

Незалежно від Посельє, російський учений **Липкін** у 1868 р. винайшов оригінальний механізм, який переводить прямолінійний рух у коловий.

Геометричні міркування над механізмами П. Л. **Чебишева**** привели його до точного розв'язання цієї задачі. Дамо опис цього інверсора.

---

* Геометрично довести, що це інверсор, пропонуємо читачеві.
** Основоположник теорії механізмів у Росії.

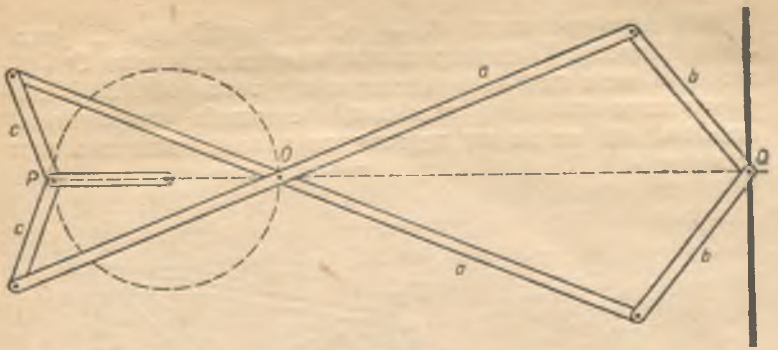


Рис. 33.

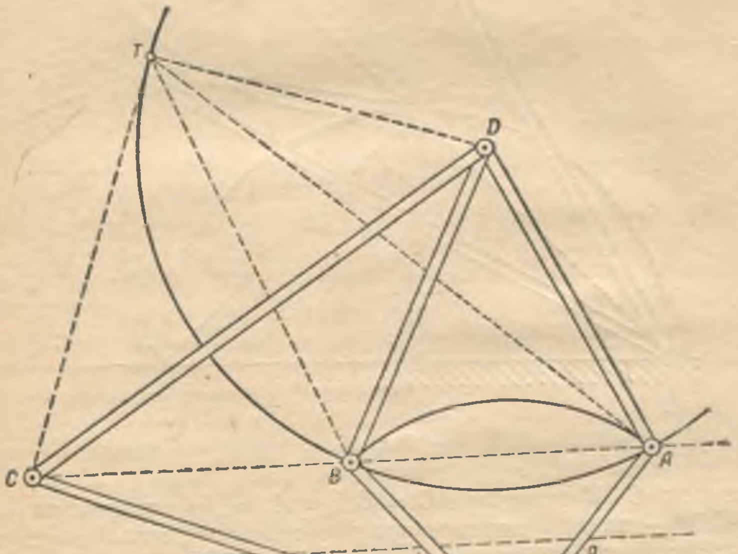


Рис. 34.

Візьмемо три точки A, B і C на деякій прямій (рис. 34) і з'єднаємо їх шарнірними важелями з точками D і d, кожна з яких однаково віддалена від точок A і B. Утворена таким способом комбінація стержнів має ту властивість, що як би ми не змінили взаємну відстань між точками A і B, вони будуть лежати на одній прямій з

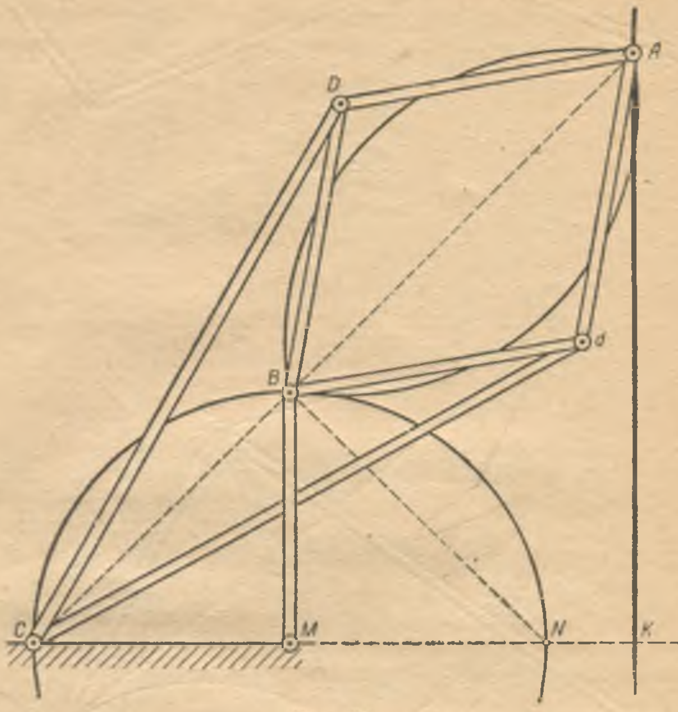


Рис. 35.

точкою C. У випадку $AD = BD = Ad = Bd$ чотирикутник $ADBd$ — ромб, і вказану властивість його легко вивести з рівняння:

$$DC^2 - DA^2 = dC^2 - dA^2.$$

А коли при деякому положенні нашої комбінації стержнів проведемо пряму $ab \parallel AB$, що перетинає прямі Ad, Bd й Cd в точках a, b і c, то побачимо, що $ad = bd$ і що точки a, b і c також розмістяться на одній прямій.

Ще одна властивість цієї комбінації стержнів та, що при кожному можливому взаємному розміщенні точок A і B лишається справедливою така рівність:

$$CA \cdot CB = DC^2 - DA^2 = dC^2 - dA^2.$$

А через те що стержні DC і DA дано, то добуток відстаней точок A і B від точки C лишається сталим. У

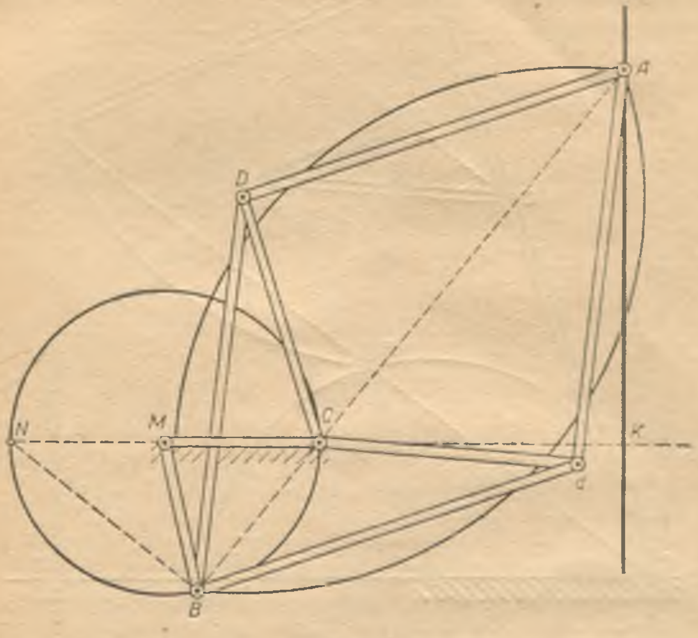


Рис. 36.

цьому легко переконатись. Побудуємо коло радіуса $DA = DB$ з центром у точці D; тоді пряма CBA буде січною. За відомою з планіметрії теоремою дістанемо: $CA \cdot CB = CT^2 = DC^2 - DT^2 = DC^2 - DA^2$, де T — точка дотику прямої CT з колом. Сполучивши точки A і B з точкою T, матимемо два подібні трикутники CTA і CBT. Оскільки $\angle TCA = \angle BCT$ і $\angle CTB = \angle CAT$, звідси випливає: $CA : CT = CT : CB$, $CA \cdot CB = CT^2$. Якщо точку C (або c) закріпити, а точку B (або b) змусити описувати деяку криву, то точка A (або a) опише інверсну до неї криву відносно полюса C (або c). Зокрема, якщо точка B описуватиме коло, то точка A опише пряму, перпендикулярну до прямої, яка проходить через полюс і центр кола. Тому, щоб дістати пряму, досить у цій комбінації стержнів точку C (або c) закріпити шарніром, а точку B (або b) з'єднати шарнірним стержнем з нерухомою

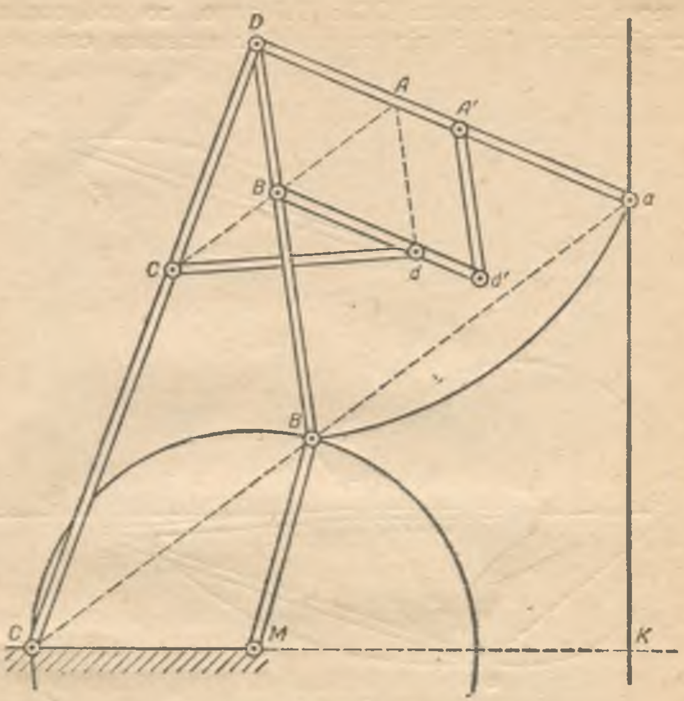


Рис. 37.

точкою M так, щоб $MB = MC$ (або $Mb = Mc$) (рис. 35). Тоді точка A (або a) описуватиме пряму, перпендикулярну до прямої CM; а коли $MB = MC$, то точка A опише дугу деякого кола. На рис. 34 і 35 нерухома точка C міститься поза A і B, а на рис. 36 між ними. Справді, нехай (рис. 35 і 36) K і N будуть точками перетину прямої CM з перпендикуляром AK (або aK) і колом радіуса $BM = CM$ (або $bM = cM$) із центром у точці M. З прямокутних подібних трикутників CBN і CKA дістанемо: $CK : CB = CA : CN$, звідси $CK = \frac{CA \cdot CB}{CN} =$

$= \pm \frac{DC^2 - DA^2}{2MB}$. Причому знак плюс відноситься до рис. 35, а знак мінус — до рис. 36. Отже, $CK = \text{const}$.

Чотирикутник $ADBd$ є ромбом, з якого сторона Ad переходить у паралельне їй положення $A'd'$. Це означає що при будь-якому положенні фігури перпендикуляр, опущений з точки a, перетинає пряму CK в одній і тій самій точці K. Отже, точка a, рухаючись, обов'язково описує пряму (перпендикуляр) AK, що й треба було довести.

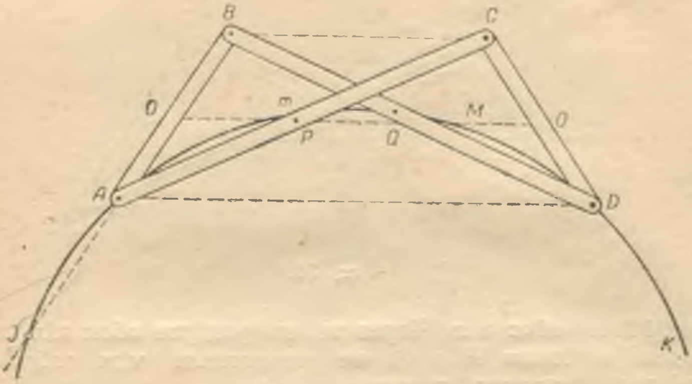


Рис. 38.

Інверсор Гарта. Новий вид напрямного механізму у 1874 р. запропонував Гарт. Це гіперболічний інверсор, що має форму рівнобедреної трапеції, складеної з чотирьох стержнів $AB = CD = b$ і $BD = AC = a$, скріплених шарнірами у точках A, B, C і D. Принцип дії його такий.

Нехай O, P і Q будуть точками прямої, паралельної основам трапеції. Встановимо в точці O вістря, а в точках P і Q олівці (рис. 38). Якщо точку O закріпити й пересувати олівець P по якій-небудь кривій, то олівець Q опише фігуру, інверсну першій. Оскільки трикутники OBQ і OAP подібні трикутникам ABD і ABC, то $OQ : AD = OB : AB$ і $OP : BC = OA : AB$. Перемноживши ці пропорції почленно, дістанемо: $(OQ \cdot OP) : (AD \cdot BC) = (AO \cdot OB) : AB^2$. Через те, що ця трапеція рівнобедрена.

навколо неї можна описати коло; а застосувавши до неї відому теорему Птолемея*, ми дістанемо: $AD \cdot BC + b^2 = a^2$.

Отже, $OQ \cdot OP = (a^2 - b^2) \cdot \frac{OA \cdot OB}{AB^2} = \text{const}$.

Звідси також випливає, що точки O, P і Q лишаються на одній прямій. Більше того, можна закріпити не тільки точку O, а й всю сторону AB, тоді точки P і Q опишуть кола відповідно з центрами у точках A і B і радіусами PA і PC. Оскільки відношення цих радіусів дорівнює відношенню, $OA : OB$ точка O буде центром

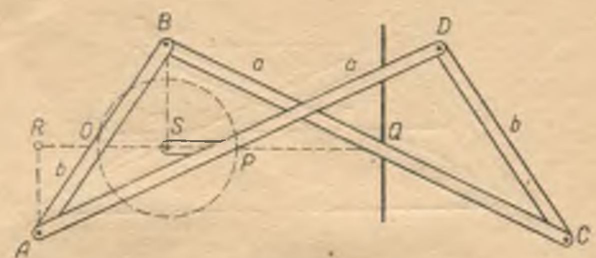


Рис. 39.

подібності обох кіл. Через те, що радіуси обох кіл, проведені в точки P і Q, не паралельні між собою, ці дві точки взаємно інверсні.

Отже, добуток $OP \cdot OQ$ буде сталим, якщо навіть деформувати цю фігуру, зберігаючи нерухомими точки A і B. Нарешті, інверсору можна надати дещо іншої форми, з'єднавши точку P з деякою нерухомою точкою S (рис. 39) твердим стержнем, довжина якого дорівнює відрізкові SO. Тоді точка Q накреслить пряму лінію.

Легко помітити, що може бути й навпаки; коли в рівнобедреній трапеції вибрати на стороні AB й діагоналях AC і BD три точки O, P і Q так, щоб $\frac{PD}{AP} = \frac{QB}{CQ} = \frac{OB}{OA} = \text{const}$, і довільно змінювати цю трапецію, маючи фіксовану точку O, то точки P і Q описуватимуть інверсні фігури.

Справді, з поданого вище ряду відношень випливає, що точки O, P і Q лежать на прямій, паралельній прямим AC і BD. Крім того, чотири точки P, Q, A і C

*Див. задачу 16.

завжди лежать на колі, яке перетинає продовження прямої AB в точці I.

Користуючись відомою властивістю січних, проведених з точки B до кола K, дістанемо: $BA \cdot BI = BQ \cdot BD$, а це показує, що відстань між точками A й I стала. З другого боку, $OP \cdot OQ = OA \cdot OI$. А оскільки AI стале, то значить і OI також стале; а отже, добуток $OP \cdot OQ$ так само сталий. Правильність твердження доведено.

З а у в а ж е н н я. Незважаючи на видиму відмінність конструкції інверсорів Посельє — Липкіна і Гарта, між ними можна встановити геометричний зв'язок (рис. 40).

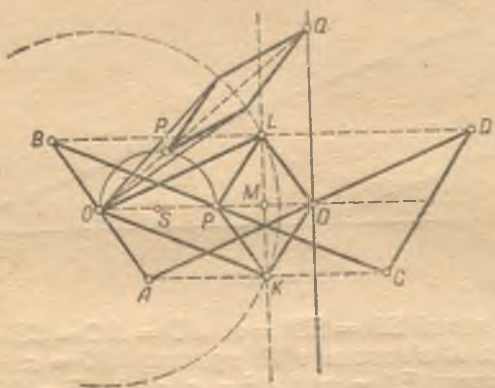


Рис. 40.

Справді, якщо точку O закріпити, а точку P рухати по колі з центром S, то точка Q рухатиметься по прямій QQ_1, перпендикулярній до OQ і інверсній до кола S, і навпаки.

Справді, з попереднього відомо, що $OP \cdot OQ = OM^2 - MQ^2 = OL^2 - LQ^2 = R^2$. А коли точка P переміститься в P_1, то точка Q перейде в положення Q_1, і також матимемо: $OP \cdot OQ = \text{const}$.

У цьому разі степінь інверсії дорівнює $OL^2 - LQ^2$. Щоб можна було змінити його положення, стержні OL і OK роблять розсувними. Легко підібрати довжину OL так, щоб: $R_1^2 = QL^2 + R^2$.

Стержні інверсора Гарта скріплено шарнірами A, B, C і D. Нехай L і K — середини уявлюваних сторін AC і BD.

Тоді дістанемо рухомий ромб $PLQK$; конструкцію зведено до попередньої, причому степінь інверсії $OP \cdot OQ = OL^2 - PL^2$ буде в чотири рази менший $BC^2 - AB^2$.

Інверсор, який перетворює коловий рух в інверсний коловий. Якщо до інверсора Посельє — Липкіна додати два стержні AG і CH, як зображено на рис. 41, то такий механізм може перетворювати коловий рух у інверсний коловий.

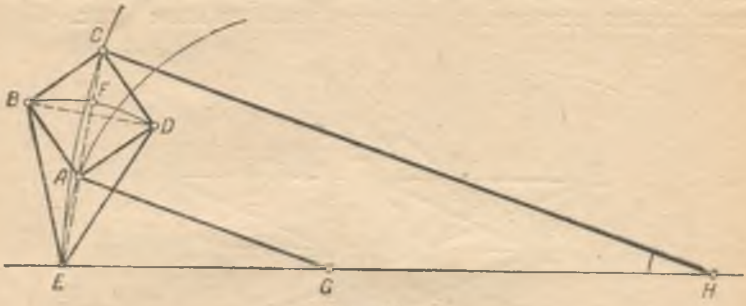


Рис. 41

Справді, нехай $EB = ED = a$, $AD = DC = CB = BA = b$, а точка A з'єднана з G, причому $AG = c$.

Нехай також $EA = m$ і $AF = n$, тоді $AE = CE = m \times (m + 2n) = m^2 + 2mn$. Але $BF^2 = a^2 - (m + n)^2 = b^2 - a^2$. Отже, $m^2 + 2mn = a^2 - b^2$ і $EA \cdot AC = \text{const}$.

Отже, точки A і C взаємно інверсні відносно полюса E, тому, коли точка A описує коло, точка C також описує коло.

Але за умовою, точка A може рухатись по колу радіуса $c = AG$ з центром G. Отже, центр H кола, описуваний точкою C, лежить на прямій EG, так що

$$EH = \frac{d(b^2 - a^2)}{d^2 - c^2},$$

де $EG = d$.

Якщо $EG = AG$, то коло, описуване точкою C, перетворюється в пряму, перпендикулярну до EG.

ЗМІСТ

Иван Фёдорович Тесленко,
Метод инверсии и его применение
(на украинском языке).
Государственное учебно-педагогическое издательство
«Радянська школа»

Іван Федорович Тесленко,
Метод інверсії та його застосування

Редактор *М. О. Журбас* Художн. редактор *В. Ф. Монжеран*
Технічний редактор *З. Г. Берман* Коректор *Л. М. Кардаш*

Здано до набору 4/II 1959 р. Підписано до друку 30/IV 1959 р. Папір $84 \times 108^{1}/_{32}$. Друк. арк. 1,5, умовн. арк. 2,46, видавн. арк. 2,25. Тираж 3000. БФ 07491. Державне учбово-педагогічне видавництво «Радянська школа». Київ, Ново-Павлівська, 5. Видавн. № 10793. Ціна 65 коп.

Надруковано з матриць Книжкової ф-ки ім. Фрунзе Головвидаву Міністерства культури УРСР, Харків, Донець-Захаржевська, 6/8, в друкарні «Комуніст» Головвидаву Міністерства культури УРСР, Харків, Пушкінська, 29. Зам. 323.