ШЛЯХАМИ МАТЕМАТИКИ

5–9 клас

ПП
ПЕДАГОГІЧНА ПРЕСА

ШЛЯХАМИ МАТЕМАТИКИ

Хрестоматія
для учнів 5–9 класів

Упорядник Т. М. Хмара

Київ
«ПЕДАГОГІЧНА ПРЕСА»
1999

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

Загальний спосіб письмового зображення чисел за допомогою спеціальних знаків у математиці називають *нумерацією*, або *системою числення*. Отже, йтиметься про різні системи числення. Окремі народи за різних часів користувалися різними способами називання і записування чисел. Десяткова нумерація, якою ми тепер користуємося, є результатом тривалого історичного розвитку.

Різні народи користувалися різними лічильними групами, але більшість застосовувала десяткові групи лічби, в основі якої була лічба за допомогою пальців.

Лічбою групами по два (попарно) користувалися, наприклад, остров'яни західної частини Торресової протоки.

Використання під час лічби пальців однієї руки привело до створення п'ятіркового числення, на сліди якого ми натрапляємо, зокрема, в римській письмовій нумерації.

В окремих народів, наприклад чукчів, можна спостерігати користування усною п'ятірковою системою числення ще й досі.

Дослідження вчених показують, що в деяких народів існувала дванадцяткова система числення. І тепер ми знаходимо її сліди в лічбі предметів дюжинами (дюжина ложок, виделок, гудзиків тощо). На Заході ще й досі, крім дюжин, користуються «великою дюжиною» — гроссом. Гросс — це дюжина дюжин, тобто 144.

Ацтеки — народ Мексики — лічили двадцятками, а спосіб запису чисел у них відповідав лічбі п'ятірками. Жителі півострова Юкатан (народ майя) також лічили двадцятками.

Сліди лічби двадцятками залишилися в сучасній французькій мові, де, наприклад, числівник вісімдесят («quatre-vingts») у дослівному перекладі означає «чотири двадцять» (чотири двадцятки), числівник дев'яносто («quatre-vingts-dix») — «чотири двадцять десять».

Групами по шістдесят лічили в стародавньому Вавилоні. Це відбилося на вавилонській системі мір, в якій відношення одиниць вимірювання дорівнювало 60. Від вавилонян веде свій початок існуюча система мір часу і кутів.

Першими позначеннями чисел були зарубки на паличках (слов'яни називали їх *бирками*). Зокрема, у різних народів таким способом «записувалися» боргові зобов'язання, а пізніше й податки. Паличку з нанесеними на ній надрізами, що відповідали сумі боргу або податку, розколювали навпіл і давали одну половину боржникові, а другу – позикодавцеві або, відповідно, платникові й казначейству. Під час розплати обидві половини палички прикладали одну до одної і таким чином перевіряли правильність визначення сум, які треба було повернути. В Англії цей спосіб запису податків існував до недавнього часу.

Для запам'ятовування чисел люди користувалися також вузлами на мотузках. Відомо, наприклад, що деякі африканські та індійські племена користувалися шнурами з вузлами, кількість яких відповідала кількості голів худоби. Шнури з вузлами застосовували також для відліку часу. У міскітів (Нікарагуа) є звичай, за яким чоловік, збираючись у дорогу, залишає жінці шнур зі стількома вузлами, скільки днів він буде відсутній.

Зарубки на бирках і вузли на шнурах пов'язувалися з лічбою окремих одиниць. З розвитком письма з'являються окремі позначення й малюнки для груп одиниць. Наприклад, число п'ять зображали малюнком руки, число десять — відповідно двох рук. Пригадайте римське V, адже це не що інше, як малюнок долоні. В Єгипті для позначення груп одиниць застосовувалися спеціальні ієрогліфи.

В основі запису чисел за єгипетською нумерацією лежить повторюваність знаків, що позначають певні розряди, і додавання розрядних одиниць. Наприклад, число 4 зображали як IIII і т. д.

Окремі народи використовували як числові знаки букви алфавіту. Під впливом алфавітної нумерації греків наші предки слов'яни записували числа за допомогою букв слов'янського алфавіту, над якими ставили спеціальний знак — титло:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Одиниці	А	В	Г	Д	Є	Ѕ	З	И	Ѳ
Десятки	І	К	Л	М	N	Ѯ	Ѻ	П	Ч
Сотні	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ѱ	Ѡ	Ц
Тисячі	҂А	҂В	҂Г	҂Д	҂Є	҂Ѕ	҂З	҂И	҂Ѳ

Наприклад, число 1998 у слов'янській нумерації мало такий вигляд:

҂АЦЧИ.

Крім так званого малого числа, яке доходило до 10 000 і вживалося в повсякденному житті, у слов'ян існувала ще система «великого числа». Для позначення цих великих чисел користувалися тими самими буквами, що й для позначення простих одиниць, але кожний вищий розряд обводили відповідним бордюром.

Наведені способи запису чисел мають великі незручності. Вони неекономні навіть для запису невеликих чисел, а про великі числа нема що й казати. Адже кожний розряд потребує тут спеціального знака.

Найкраще розв'язали це питання індійці. Вони винайшли спосіб запису чисел натурального ряду за допомогою небагатьох знаків, створивши в VI ст. десяткову нумерацію, якою користуються тепер у всьому світі.

Індійську нумерацію розвинув у IX ст. видатний узбецький учений Мухаммед, син Муси з Хорезма, в рукопису «Арифметика Індорум», написаному арабською мовою.

В Європі арабсько-індійська система нумерації стала відома на початку XIII ст. завдяки італійському вченому Леонардо Пізанському, а повне визнання вона дістала в XV – XVI ст. У XVII ст. індійською системою запису чисел користувалися вже для нумерації сторінок у книжках, на золотих монетах, в окремих друкованих і рукописних працях.

Відомий підручник «Арифметика» Л. П. Магніцького (1703 р.) викладений на основі арабсько-індійської системи числення.

ПРО ІНДІЙСЬКУ СИСТЕМУ ЧИСЛЕННЯ

Індійська система числення, якою ми користуємося, характеризується двома основними ознаками: по-перше, вона десяткова, по-друге, – позиційна.

Пояснимо докладніше суть цих ознак.

Ви знаєте, що лічба ведеться десятками: десять простих одиниць утворюють один десяток, десять десятків – одну сотню, десять сотень – одну тисячу і т. д. Спосіб лічби, за якого десять одиниць нижчого розряду утворюють одну одиницю вищого розряду, і є основною ознакою *десяткової* системи числення, або десяткової нумерації.

Система числення називається *позиційною*, якщо вона ґрунтується на залежності значення цифр – знаків, якими зображають числа, від місця. Вдумайтесь у відомий вам спосіб запису чисел і ви помітите, що в ньому одна й та сама цифра має різні значення залежно від місця, яке вона займає в зображенні числа.

Наприклад, цифра 2 в запису числа 2 222 має чотири різних значення. Крайня справа двійка зображує тут прості одиниці, цифра 2, яка стоїть зліва від неї, зображує десятки, а далі, відповідно, маємо дві сотні і дві тисячі.

Положення (позиція) цифр у запису числа суттєво впливає на його значення. Так, числа 871, 817, 781, 187 і 178 не однакові за значенням, бо в їх запису цифри 1, 7 і 8 займають різні місця.

У десятковій позиційній системі числення назви всіх натуральних чисел до 999 мільйонів утворюються за допомогою лише 13 слів: один, два, три, чотири, п'ять, шість, сім, вісім, дев'ять, десять, сто, тисяча, мільйон. У деяких назвах слово «десять» скорочується в «дцять».

Щоб записати будь-яке число в десятковій системі, досить десяти різних знаків – цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Порівняймо запис будь-якого досить великого числа в індійській і римській системах нумерації. Ви знаєте, що в римській системі для позначення чисел застосовують такі символи:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Результат множення на тисячу позначається рискою вгорі: $\overline{\mathrm{VI}}$ = 6 000 Отже, наприклад, запис числа 287 649 у римській системі нумерації матиме вигляд: $\overline{\mathrm{CCLXXXVII}}$DCXLIX. Замість шести знаків, якими зображається число 287 649 у позиційній (десятковій) системі, для запису цього самого числа в непозиційній системі потрібно було 15 знаків.

MCMXCVIII

1998

Переваги позиційної системи нумерації виявляються не лише в запису чисел, а й у виконанні дій над ними. Упевніться в цьому, спробувавши виконати письмово дії над невеликими числами, записаними римськими цифрами. Ви побачите, що по суті доводиться виконувати дії в умі, бо застосовувати за такого запису чисел відомі нам способи письмових обчислень неможливо.

Навчившись у ранньому дитинстві записувати числа, ми потім ніколи не замислюємося над тим, яким важливим був винахід позиційної десяткової системи числення і скільки труднощів довелося подолати, поки була знайдена письмова нумерація на основі значення цифр за місцем. З цього приводу відомий французький математик П'єр Лаплас (1749 – 1827) сказав:

«Думка зображати всі числа дев'ятьма знаками, надаючи їм, крім значення за формою, ще значення за місцем, така проста, що саме через цю простоту важко зрозуміти, яка вона дивовижна. Як нелегко було прийти до цього способу, ми добре бачимо на прикладі видатних геніїв грецької вченості Архімеда і Аполлонія, для яких ця думка залишилася прихованою».

СИСТЕМНІ ЧИСЛА

Чи можна створити довільну недесяткову позиційну систему числення? Позитивну відповідь на це питання дав французький математик Б. Паскаль ще в 1665 р. Він стверджував, що за лічильну групу, або за основу системи числення, можна взяти будь-яке натуральне число. Покажемо, що, користуючись принципом значення цифр за місцем, можна створити різні позиційні системи числення, відмінні від десяткової.

Будемо давати назву системі числення залежно від її основи (лічильної групи), тобто числа одиниць, що становлять одиницю дальшого, вищого порядку (розряду). Отже, якщо лічба ведеться двійками, то основою системи числення є число 2, і систему числення називатимемо *двійковою*. Якщо за основу взято число 4, то таку систему називатимемо *четвірковою* і т. д.

Побудова будь-якої системи числення ґрунтується на принципі: якесь певне число одиниць становить одну нову одиницю дальшого, вищого порядку, або розряду.

Якщо, наприклад, за основу взяти 5, то в такій системі 5 одиниць одного розряду становлять одиницю вищого розряду. Одиницею II розряду є п'ятірка, відповідно III розряду – п'ять п'ятірок, тобто 5^2, і т. д.

Число, позначене за допомогою певної позиційної системи числення, називається *системним*.

Розглянемо загальний спосіб системного запису натурального числа. Щоб краще зрозуміти його, почнемо із загальної форми запису числа за десятковою нумерацією.

Ви знаєте, що будь-яке натуральне число N за десятковою системою числення розкладається на прості одиниці, десятки, сотні, тисячі і т. д., причому одиниць кожного розряду менше десяти. Нехай число N містить: a_0 простих одиниць, a_1 десятків, a_2 сотень, a_3 тисяч і т. д.; тоді число, яке має $n + 1$ розрядів, можна записати так:

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0.$$

Наприклад, користуючись цією формою зображення чисел, можна записати:

$$724 = 7 \cdot 10^2 = 2 \cdot 10 + 4;$$
$$3\ 571 = 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1;$$
$$203\ 405 = 2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5.$$

Навпаки:

$$8 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 4 = 82\ 574;$$
$$3 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^2 + 1 = 3\ 010\ 201.$$

Якщо додержуватися принципу *помісцевого* значення цифр, то число N, що має $n + 1$ розрядів, за п'ятірковою системою можна зобразити так:

$$(N = a_n 5^n + a_{n-1} 5^{n-1} + ... + a_3 5^3 + a_2 5^2 + a_1 5 + a_0),$$

де кожне з чисел a_0, a_1, a_2, ..., a_n менше п'яти.

Для зображення числа за п'ятірковою системою досить п'яти цифр: 0, 1, 2, 3, 4. У випадку вісімкової системи для зображення числа потрібно 8 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Найменше цифр (0 і 1) потрібно для зображення чисел за двійковою системою числення. У двійковій системі одиниця кожного старшого розряду дорівнює двом одиницям попереднього розряду. Щоб записати число в двійковій системі, треба подати його у вигляді суми послідовних степенів числа 2. Наприклад, сума

$$1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$$

є зображенням десяткового числа 327 (перевірте!).

Користуються і такою формою запису: $327_{10} = 101\ 000\ 111_2$.

Числа 10 і 2, що стоять унизу біля зображень відповідних чисел, показують основи систем, в яких вони записані.

У загальному випадку будь-яке ціле число N у певній системі числення, за основу якої взято число k, можна єдиним способом подати у вигляді суми степенів основи (записаної в десятковій системі) з коефіцієнтами a_0, a_1, a_2, ..., a_n, що дорівнюють цифрам вихідного числа:

$$N = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + ... + a_3 k^3 + a_2 k^2 + a_1 k + a_0.$$

Серед цифр a_0, a_1, a_2, ..., a_n, можуть бути і рівні між собою, але кожна з них є невід'ємним цілим числом, меншим за k.

Обчисливши цю суму за правилами дій у десятковій системі числення, дістанемо десяткове число, еквівалентне даному числу, записаному в системі числення з основою k.

Зауважимо, що для зображення чисел за системою, в якій основа перевищує 10, не достатньо цифр 0, 1, 2, ..., 9. Для запису чисел за будь-якою системою числення треба мати нуль і стільки значущих цифр, скільки одиниць без однієї містить основа числення.

Так, для запису чисел у системі числення з основою 12, крім загальновживаних десяти цифр, потрібні ще два символи — цифри «десять» і «одинадцять». Позначимо їх відповідно буквами c і d. Тоді число $2dc7$, записане в дванадцятковій системі числення, буде таким десятковим числом:

$$2 \cdot 12^3+11 \cdot 12^2+10 \cdot 12+7 =$$
$$= 2 \cdot 1\ 728+11 \cdot 144+10 \cdot 12+7 = 5\ 167.$$

У скільки разів число 134000_5 більше від числа 134_5?

У якій системі числення:

$$\begin{array}{r} \times\ 121 \\ 12 \\ \hline 242 \\ 121\ \ \\ \hline 2002 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 231 \\ 54 \\ \hline 1144 \\ 1375\ \ \\ \hline 15114 \end{array}$$

Для основи системи не потрібний спеціальний знак. У будь-якій системі, побудованій за принципом помісцевого значення цифр, основа системи зображається одиницею з нулем.

Початок натурального ряду, записаного в різних системах числення, має такий вигляд:

у десятковій: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... ;

у двійковій: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, ... ;

у трійковій: 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, ... ;

у четвірковій: 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, ... і т. д.

Якщо відомі цифри, що використовуються в певній системі числення, то послідовні цілі числа цієї системи можна записувати за таким правилом. Для утворення наступного за даним числа крайню праву цифру даного числа замінюють наступною за значенням цифрою. Якщо якась цифра після заміни стала нулем, то замінюють наступною цифру, що стоїть ліворуч від крайньої правої.

За цим правилом у п'ятірковій системі числення за числом 3 043 йтиме число 3 044, а за числом 3 044 — число 3 100.

У двійковій системі крайніми справа цифрами в записі числа є 0 або 1. Отже, 0 замінюємо на 1, а 1 — на 0. Так, за числом 100 110 йтиме число 100 111, а за числом 100 111 — число 101 000.

Дуже просто виконуються в двійковій системі числення арифметичні дії.

Слід мати на увазі, що відомі правила дій у десятковій системі числення зберігають силу і в будь-яких інших позиційних системах числення, але для кожної системи треба користуватися «своїми» таблицями додавання і множення одноцифрових чисел. Для двійкової системи ці таблиці мають вигляд:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Приклади:

$$\begin{array}{r} 1001101 \\ +\ 11100111 \\ \hline 100110100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 110101 \\ \times\ 11001 \\ \hline 110101 \\ 110101 \\ 110101 \\ \hline 10100101101 \end{array}$$

Як видно з розв'язання другого прикладу, множення чисел у двійковій системі зводиться до переписування множеного у відповідних розрядах і наступного додавання. За наявності в множнику нулів множене зсувають уліво на відповідну кількість розрядів. Віднімання в двійковій системі числення виконують так само, як і в десятковій.

Приклад:

$$\begin{array}{r} 11011001 \\ -\ 1100101 \\ \hline 1110100 \end{array}$$

Ділення виконують у такій самій послідовності, як ділення десяткових чисел у стовпчик. Якщо в процесі ділення дільник виявляється більшим від діленого, то в частці записують 1.

Приклад:

$$\begin{array}{r|l} 101100 & 100 \\ \cline{2-2} -100 & 1011 \\ \cline{1-1} 110 & \\ -100 & \\ \cline{1-1} 100 & \\ -100 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Отже, ділення двійкових чисел зводиться до віднімання дільника від відповідних розрядів діленого.

За записом числа в двійковій системі легко визначити, чи це число парне, чи непарне. Парне число закінчується нулем, а непарне − одиницею.

У різних системах числення ознаки подільності, взагалі кажучи, різні. Але якщо, наприклад, у десятковій системі число закінчується цифрою 5, то в системі числення з основою 2 воно також буде кратне 5. Адже кількість простих одиниць у числі не змінилася від того, що воно записане по-іншому.

Коли ми кажемо «цілі числа в двійковій системі числення», «цілі числа в десятковій системі числення» і т. ін., то маємо на увазі ту саму множину цілих чисел, записаних різними способами – в різних системах числення.

В якій системі числення?
$3+2=11$
$30-12=12$
$13 \cdot 2=32$

Наприклад, символи 1111101 і 125 є двома різними способами запису того самого цілого числа в двійковій і десятковій системах числення.

Завдяки тому, що в двійковій системі числення використовується лише два знаки – 0 і 1, вона широко застосовується в комп'ютерах, бо в їх основу покладені схеми, що можуть перебувати тільки в двох стійких станах (замкнений або розімкнений контакт; намагнічена або розмагнічена певна ділянка магнітної стрічки тощо): одному із цих станів відповідає одиниця, а іншому – нуль.

Двійкова система числення має переваги над іншими системами і в техніці виконання операцій над числами. Її застосування створює також можливості для використання методів математичної логіки, бо наявність двох протилежних можливостей «так» і «ні» відповідає логічним висловленням «правильне» та «хибне».

ПЕРЕХІД ВІД ОДНІЄЇ СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ ДО ІНШОЇ

За допомогою десяти цифр десяткової системи можна зобразити будь-яке число в новій системі, основа якої менша за 10. Нехай, наприклад, число 345 десяткової системи треба подати у вісімковій системі. Запишемо це так: $345_{10} = x_8$. Визначимо спочатку, скільки одиниць другого розряду за вісімковою системою можна утворити з 345 простих одиниць. Для цього 345 поділимо на 8. У частці дістанемо 43.

345 : 8 = 43 (одиниці II розряду).

Перша остача: 1 одиниця I розряду.

Знайдемо, скільки одиниць III розряду міститься в 43 одиницях II розряду:

43 : 8 = 5 (одиниць III розряду).

Друга остача: 3 одиниці II розряду.

Отже, найвищим у цьому числі буде III розряд (5 одиниць), потім треба записати II розряд (3 одиниці) і, нарешті, I розряд (1 одиниця).

Маємо: $345_{10} = 531_8$.

Щоб перетворити число десяткової системи числення в число нової системи, треба поділити його на основу нової системи, нову частку знову поділити на основу нової систем і т. д., поки дістанемо частку, меншу від основи нової системи. Остання частка і послідовні остачі, записані в зворотному порядку, будуть розрядними числами шуканого числа. Запишемо те саме число 345 десяткової системи в двійковій системі, тобто знайдемо $345_{10} = x_2$.

```
345 (I) | 2
 1      172 (II) | 2
          0      86 (III) | 2
                   0      43 (IV) | 2
                            2      1 (V) | 2
                                   1     10 (VI) | 2
                                           0      5 (VII) | 2
                                                  1      2 (VIII) | 2
                                                          0       1(IX)
```

Якщо 4·4=20, то чому дорівнює 5·5 (у тій самій системі числення)?

У скільки разів збільшиться число 356_7, якщо приписати до нього один нуль?

У скільки разів 7210_8 більше від 721_8?

Найвищим розрядом у шуканому записі числа буде дев'ятий. Виписуючи за ним послідовні остачі в зворотному порядку, дістанемо:

$$345_{10} = 101011001_2.$$

ОБЕРНЕНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Перейти від запису числа в будь-якій системі числення до запису цього числа в десятковій системі можна двома способами.

Спосіб I. Нехай треба знайти: $3142_5 = x_{10}$.

Найстаршим у цьому записі числа є четвертий розряд.

Одиниця IV розряду в п'ятірковій системі дорівнює 5 одиницям III розряду, а 3 одиниці IV розряду містять $3 \times 5 = 15$ одиниць III розряду; додаємо ще 1 одиницю III розряду: $15 + 1 = 16$, і дізнаємося, що в 16 одиницях III розряду міститься $16 \cdot 5 = 80$ одиниць II розряду.

Усіх одиниць II розряду буде: $80 + 4 = 84$, а одиниць I розряду: $84 \times 5 + 2 = 422$.

Отже, $3142_5 = 422_{10}$.

Спосіб II. Скориставшись загальним способом запису числа в п'ятірковій системі числення, матимемо:

$$3142_5 = 3 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 2.$$

Виконавши дії в правій частині рівності, підрахуємо число простих одиниць у цьому числі і запишемо їх у десятковій системі числення:

$$3\,142_5 = 375 + 25 + 20 + 2 = 422_{10}.$$

Отже, $3\,142_5 = 422_{10}$.

Щоб замінити число n-ної системи числом m-ної системи, можна спочатку число n-ної системи замінити числом десяткової системи, а потім це останнє — числом m-ної системи.

Приклад: $32\,301_4 = x_6$.

В ЯКИХ СИСТЕМАХ ЧИСЛЕННЯ ЗАПИСАНІ ЦІ ТАБЛИЦІ МНОЖЕННЯ:

	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

	2	3	4	5	6	7
2	4	6	10	12	14	16
3	6	11	14	17	22	25
4	10	14	20	24	30	34
5	12	17	24	31	36	43
6	14	22	30	36	44	52
7	16	25	34	43	52	61

	2	3	4	5	6
2	4	6	11	13	15
3	6	12	15	21	24
4	11	15	22	26	33
5	13	21	26	34	42
6	15	24	33	42	51

Розв'язання. Знайдемо $x_{10} = 32\,301_4$. Маємо:

$$x_{10} = 3 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 1 = 768 + 128 + 48 + 1 = 945.$$

Тепер визначимо $954_{10} = x_6$.

$$\begin{array}{l} \underline{945\ (\mathrm{I})\ |\ 6} \\ \quad 3 \qquad \underline{157\ (\mathrm{II})\ |\ 6} \\ \qquad\qquad\quad 1 \qquad \underline{26\ (\mathrm{III})\ |\ 6} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2 \qquad 4\ (\mathrm{IV}) \end{array}$$

Отже, $945_{10} = 4\,213_6$, тобто $32\,301_4 = 4\,213_6$.

Порівнюючи записи чисел у різних позиційних системах числення, помічаємо, що в двійковій системі вони містять велику кількість розрядів. Це дуже незручно і при складанні програм для комп'ютерів, і при введенні програм та чисел у машину. Тому, виконуючи ці операції, часто користуються іншими позиційними системами, в яких для запису чисел потрібна менша кількість розрядів. Найбільшого поширення набули вісімкова і шістнадцяткова системи числення, від яких легко переходити до двійкової системи, бо 8 і 16 є цілими степенями числа 2.

Наприклад, щоб перейти від запису числа за вісімковою системою до запису в двійковій системі, кожний розряд вісімкового числа перетворюють у двійкову систему окремо. Нехай треба здійснити такий перехід:

$$651_8 = x_2.$$

Маємо:

$$\begin{array}{l} \underline{6\ (\mathrm{I})\ |\ 2} \\ \ 0 \qquad \underline{3\ (\mathrm{II})\ |\ 2} \\ \qquad\quad 1 \qquad 1\ (\mathrm{III}) \end{array}$$

6 одиниць третього розряду у вісімковій системі відповідають групі цифр 110; 5 одиниць другого розряду дають, відповідно

$$\begin{array}{l} \underline{5\ (\mathrm{I})\ |\ 2} \\ \ 1 \qquad \underline{2\ (\mathrm{II})\ |\ 2} \\ \qquad\quad 0 \qquad 1\ (\mathrm{III}) \end{array}$$

або групу цифр 101; 1 одиницю першого розряду (просту одиницю) записуємо у вигляді 001.

Отже, $651_8 = 110101001_2$.

Кожній цифрі числа 651_8 відповідає три розряди числа 110101001_2.

У випадку, коли треба перейти від двійкової до десяткової системи, можна як проміжну використовувати вісімкову систему. При цьому двійково-вісімково-десятковий перехід здійснюється так.

1) У двійковому записі числа утворюємо групи цифр справа наліво по три цифри в кожній групі.

2) Записуємо десятковий вираз для кожної групи і дістаємо запис шуканого числа у вісімковій системі.

3) Переходимо від вісімкової системи запису числа до десяткової.

Застосуємо цю схему до перетворення $11010110_2 = x_{10}$.

Маємо:

$011010110_2 = 326_8$; $326_8 = 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 6 = 3 \cdot 64 + 16 + 6 = 214$, отже, $11010110_2 = 214_{10}$.

Це перетворення можна виконувати досить швидко, якщо знати десятковий вираз двійкових чисел від 1 до 7, а саме:

001 − 1; 010 − 2; 011 − 3; 100 − 4; 101 − 5; 110 − 6; 111 − 7.

Для перетворення будь-якого десяткового числа N у двійкову систему можна застосовувати також спосіб послідовного віднімання від числа N спадних степенів числа 2.

Суть цього способу покажемо на прикладі вираження у двійковій системі числення десяткового числа 580.

$580 = 2^9 + 2^6 + 2^2$, $580_{10} = 1001000100_2$.

В ЯКІЙ СИСТЕМІ ЧИСЛЕННЯ?

$$\begin{array}{r} 1452 \\ +\ 1545 \\ \hline 3217 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10202 \\ -\ 3205 \\ \hline 4775 \end{array}$$

$$\frac{13}{20} = \frac{3}{4} \qquad \frac{12}{15} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{11}{14} = \frac{3}{4}$$

За знайденою сумою степенів 2 можна безпосередньо визначити розряди шуканого числа в двійковій системі числення.

На закінчення розглянемо відому задачу про найкращу систему гир. Цією задачею цікавилися математики різних часів (Леонардо Пізанський, XIII ст.; Лука Пачіолі, XV ст. та ін.). Видатний російський учений Д.І. Менделєєв сформулював її так: *при якому наборі гир, маючи їх по одній, можна зважувати різноманітні вантажі до деякої найбільшої маси, кладучи гирі лише на одну шальку терезів* (при цьому малися на увазі вантажі, маса яких виражається цілим числом основних одиниць маси, наприклад грамів).

$$\begin{array}{r} -580 \\ 512 = 2^9 \\ \hline -68 \\ 64 = 2^6 \\ \hline -4 \\ 4 = 2^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Найбільший вантаж, який може бути зважений даним набором гир, має масу, що дорівнює сумі мас усіх гир цього набору. Гирі треба дібрати так, щоб ними можна було зрівноважити будь-який вантаж, який не перевищує дану суму мас. Зрозуміло, що набір гир, що задовольняють цю умову, не може бути довільним.

Якщо, наприклад, є гирі в 1, 10, 20, 40 г, то найбільший вантаж, який ними можна зважити, становить 71 г ($1 + 10 + 20 + 40 = 71$). Але за допомогою цього набору ми не можемо зрівноважити багато речей, що важать менше 71 г.

Виявляється, що, маючи набір гир двійкової системи, тобто гирі в 1, 2, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$ і т. д. грамів, можна зважити будь-який вантаж, кладучи на одну шальку терезів вантаж, а на іншу – гирі.

Отже, найкращі набори гир, що задовольняють умову цієї задачі, виражаються такими числами двійкової системи: 111, 1111, 11111, 111111, 1111111 і т. д., тобто відповідно в десятковій системі:

$111 = 4 + 2 + 1 = 7$,
$1111 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$,
$11111 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$,
$111111 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63$,
$1111111 = 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 127$ і т. д.

Як бачимо, для зважування вантажів, що не перевищують 71 г, треба скористатися набором гир у 127 г. Зокрема, для зрівноважування вантажу в 71 г треба взяти гирі в $64 + 4 + 2 + 1$ (грамів). Це легко встановити, подавши число 71 у двійковій системі числення:

$$71_{10} = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 64 + 4 + 2 + 1.$$

Вантаж 108 г можна зрівноважити гирями у $64 + 32 + 8 + 4$ (грамів), бо

$$108 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 = 64 + 32 + 8 + 4.$$

Цей спосіб визначення найкращої системи гир ґрунтується на тому, що всяке ціле число можна подати у вигляді суми степенів числа 2 або степенів числа 2 і одиниці. Доданки цієї суми знаходять за допомогою подання даного числа у двійковій системі числення.

$\overline{11}\,0\,5\,\overline{10}_{15} = 11 \cdot 15^3 + 5 \cdot 15 + 10 = 37210$

ПЕРЕВІР!

$695561_{10} = 3\,\overline{13}\,\overline{12}\,\overline{41}_{60}$

ПРИ БУДЬ-ЯКОМУ $K > 5$

$123454321_K = 11111^2_K$

Подібна задача розв'язується для трійкової системи гир за умови, що гирі можна класти на обидві шальки терезів. У цьому випадку користуються тим, що кожне натуральне число можна подати у вигляді суми та різниці степенів числа 3 і одиниці.

Наприклад,

$55=(3^4+1)-3^3$,

$74=(3^4+3)-(3^2+1)$ і т. п.

Щоб зрозуміти, як здійснити таке перетворення, розгляньте подані нижче записи:

$55 = 2001_3 = 2 \cdot 3^3+1 = (3-1) \cdot 3^3 + 1 = 3^4 - 3^3 + 1;$

$74 = 2202_3 = 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 = (3-1) \cdot 3^3 + (3-1) \cdot 3^2 + 3-1=$

$= 3^4-3^3 + 3^3 -3^2 + 3 -1= (3^4 + 3) - (3^2 + 1).$

ЗМІСТ